

СТАТЬЯ

УДК 532.516/.517

О ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ**Сенницкий В.Л.**

*ФГБУН Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск;
ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет», Новосибирск, e-mail: sennitskii@yandex.ru*

Работа посвящена рассмотрению вопроса об организации (или предотвращении) вращательного движения твердых частей гидромеханической системы по одному и тому же временному закону, как одного из содержательных вопросов, непосредственно относящихся к перспективному научному направлению – изучению динамики гидромеханических систем при нестационарных (в том числе периодических) воздействиях. Данный вопрос ранее не рассматривался. Целью работы является определение условий, при выполнении которых твердые части гидромеханической системы, подвергающейся внешнему периодическому силовому воздействию, совершают (или не совершают) синхронное вращательное движение. Исследование проведено на основе полученного в работе точного решения задачи о вращательном движении гидромеханической системы, состоящей из вязкой жидкости и двух твердых тел – криволинейной стенки и криволинейной пластины. Стенка совершает заданные вращательные колебания. Жидкость заполняет промежуток между твердыми телами. На пластину оказывается внешнее периодическое силовое воздействие. Пластина является свободной (совершает вращательное движение, подлежащее определению). Постановка задачи включает в себя уравнение движения пластины, уравнение Навье – Стокса и условия на твердых границах жидкости. Сформулированы требования, при выполнении которых реализуется (или не реализуется) синхронность движения твердых частей системы. Обнаружен новый эффект, состоящий в том, что свободная твердая часть системы – пластина – может совершать синхронное вращательное движение с различными угловыми скоростями. Получены формулы, которыми определяется внешнее силовое воздействие, обеспечивающее синхронность движения твердых частей гидромеханической системы. Результаты работы могут использоваться, в частности, при разработке и создании аппаратов, устройств, содержащих жидкость и твердые тела, совершающие периодическое движение.

Ключевые слова: вязкая жидкость, твердые тела, периодическое воздействие, синхронизация вращательного движения

ON THE ROTATIONAL MOTION OF A HYDRO-MECHANICAL SYSTEM WITH A VISCOUS LIQUID**Sennitskiy V.L.**

*¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk;
²Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk,
e-mail: sennitskii@yandex.ru*

The work is dedicated for consideration the question on organisation (or prevention) of rotational motion of hydro-mechanical system solid parts by same law of time as meaningful question immediately related with perspective scientific direction that is study of dynamics of hydro-mechanical systems under non-stationary (in particular periodic) influences. This question was not under consideration earlier. Purpose of work is determination of conditions under which solid parts of hydro-mechanical system undergoing by external periodic force influence fulfil (or not fulfil) synchronic rotational motion. Investigation is realized on base of exact obtained in work solution of problem on rotational motion of hydro-mechanical system consisting of viscous liquid and solid bodies which are curvilinear wall and curvilinear plate. Wall fulfills prescribed rotational oscillations. Liquid fills interval between solid bodies. Plate undergoes by external periodic force influence. Plate is free (it fulfills rotational motion which has to be determined). Problem formulation includes equation of plate motion, equation of Navier---Stokes and conditions at solid boudaries of liquid. Conditions are found under which synchronism of motion of system solid parts is realized (or is not realized). New effect is revealed which consists in that free solid part of system that is plate can fulfill synchronic rotational motion by various angle velocities. Formulas are obtained that determine external force influence which provides synchronism of solid parts of hydro-mechanical system. Results of work can be used in particular under elaboration and creation of apparatuses, devices that contain liquid and solid bodies which fulfill periodic motion.

Keywords: viscous liquid, solid bodies, periodic influence, synchronisation of rotational motion

Введение

Вращательное движение широко и разнообразно представлено в природе и технике – от вращательных вибраций листьев рас-

тений и движения простейших организмов (например, *Paramecium caudatum*) до вращения многочисленных пропеллеров, винтов, турбин. К числу важных современных

научно-технических задач с очевидностью относится задача синхронизации (или недопущения синхронизации) движения (в том числе вращательного движения) составных частей механических систем – задача организации (или предотвращения) движения составных частей механических систем по одному и тому же временному закону. Актуальность данной задачи определяется, в частности, тем, что синхронизация движения частей систем может быть причиной возникновения как желательных резонансов, так и вредоносных, способных приводить к тем или иным повреждениям и даже к разрушению аппаратов, устройств, конструкций. Задача синхронизации (или недопущения синхронизации) вращательного движения актуальна, в частности, для гидромеханических систем, подвергающихся периодическим по времени воздействиям. Изучение динамики гидромеханических систем при нестационарных (в том числе периодических) воздействиях является перспективным направлением в механике жидкости. Результаты исследований в этом научном направлении обладают как фундаментальным, так и прикладным содержанием [1–3]. В проводимых исследованиях используются экспериментальные и теоретические – аналитические, численные – методы. Исследованиям экспериментального типа посвящены, в частности, работы [4–6]. Результаты исследований с применением численных методов отражены в [7–9]. В работах [10–12] представлены примеры изучения вопросов с отчетливо выраженным прикладным содержанием. Современное состояние теоретических и экспериментальных исследований динамики гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях адекватно характеризуется работами [13–15]. Краткий обзор ранее проведенных исследований содержится в [1].

Изучение вопросов, касающихся синхронизации движения в гидромеханических системах, начато в работе [3], где рассмотрен вопрос о синхронизации поступательного движения твердых частей системы с вязкой жидкостью. В данной работе поставлена и решена задача о вращательном движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью, рассмотрен вопрос о синхронизации вращательного движения твердых частей системы.

Цель исследования – определение условий, при выполнении которых твердые части гидромеханической системы, подвергающейся внешнему периодическому силовому воздействию, совершают (или не совершают) синхронное вращательное движение.

Постановка и решение задачи о движении гидромеханической системы

Имеется гидромеханическая система, состоящая из несжимаемой вязкой жидкости и абсолютно твердых бесконечно длинных тел – криволинейной стенки η и криволинейной пластины ξ . Стенка η ограничена извне круговой цилиндрической поверхностью Γ_η радиуса R_η , ось которой находится на оси Z инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z . Пластина ξ ограничена круговыми цилиндрическими поверхностями Γ_ξ радиуса $R_\xi > R_\eta$ и Γ'_ξ радиуса $R'_\xi > R_\xi$; оси поверхностей Γ_ξ, Γ'_ξ находятся на оси Z . Жидкость заполняет область $Q: R_\eta \leq R < R_\xi, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < Z < \infty$ ($R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, θ, Z – цилиндрическая система координат). Стенка и пластина совершают вращательное движение вокруг оси Z . Угловая скорость Ω_η вращения стенки η вокруг оси Z заданным образом периодически с периодом T изменяется со временем $t(\Omega_\eta = \Omega_\eta \sin(2\pi t/T); \Omega_\eta > 0$ – постоянная). Плотность пластины ξ не зависит от координаты Z . Пластина ξ является свободной – ее движение не задано, угловая скорость Ω_ξ вращения пластины ξ вокруг оси Z подлежит определению.

Пусть $\tau = t/T$; $r = R/R_\eta$, $r_\xi = R_\xi/R_\eta$; V, ρ, ν – соответственно скорость, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathbf{e}_\theta$ – единичный базисный вектор, направление которого совпадает с направлением возрастания угла θ ; $\mathbf{v} = TV/R_\eta = v(r, \tau)\mathbf{e}_\theta$; P – давление в жидкости; $p = T^2P/(\rho R_\eta^2) = p(r, \tau)$; $\omega_\eta = T\Omega_\eta = \hat{\omega}_\eta \sin 2\pi\tau$; ξ^* – абсолютно твердое тело, часть пластины ξ , заполняющая область $Q^*: R_\xi < R < R'_\xi, 0 \leq \theta < 2\pi, Z^* < Z < Z^* + D$ ($Z^*, D > 0$ – постоянные); I – момент инерции тела ξ^* относительно оси Z ; $\omega_\xi = T\Omega_\xi$; $Re = R_\eta^2/(\nu T)$ – число Рейнольдса; $\varkappa = \rho R_\eta^2 R_\xi^2/I$; M_{liq} – момент сил, действующих на тело ξ^* со стороны жидкости, относительно оси Z ; $\mu_{liq} = T^2 M_{liq}/I = -2\pi(\varkappa/Re)(\partial v/\partial r - v/r)|_{r=r_\xi}$; M_{ext} – момент внешних сил, действующих на тело ξ^* , относительно оси Z ; $\mu_{ext} = T^2 M_{ext}/I = \tilde{\mu} \sin(2\pi\tau + \varphi)$ ($\tilde{\mu} > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ – параметры).

Требуется определить движение гидромеханической системы (свободных частей системы – жидкости и пластины ξ).

Задачу о движении гидромеханической системы составляют уравнение движения пластины ξ (тела ξ^*), уравнение Навье – Стокса и условия на твердых границах жидкости:

$$\frac{d\omega_\xi}{d\tau} = \mu_{liq} + \mu_{ext}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \text{ в } Q \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \omega_\eta \mathbf{e}_\theta \text{ на } \Gamma_\eta; \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = \omega_\xi r_\xi \mathbf{e}_\theta \text{ на } \Gamma_\xi. \quad (4)$$

Из (2)–(4) следует

$$p = \int_1^r \frac{v^2}{r'} dr' + c \quad (5)$$

(с – функция τ);

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \text{ для } 1 < r < r_\xi; \quad (6)$$

$$v = \omega_\eta \text{ при } r = 1; \quad (7)$$

$$v = \omega_\xi r_\xi \text{ при } r = r_\xi. \quad (8)$$

Сделаем в (6)–(8) подстановку

$$v = \text{Real}(v' e^{2\pi i \tau}),$$

$$\omega_\xi = \text{Real}(\omega' e^{2\pi i \tau}), \quad (9)$$

(v' – функция r ; ω' – постоянная). Используя полученные в результате этого соотношения, определим задачу

$$q^2 v' = \frac{d^2 v'}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv'}{dr} - \frac{v'}{r^2} \text{ для } 1 < r < r_\xi; \quad (10)$$

$$v' = -i\hat{\omega}_\eta \text{ при } r = 1; \quad (11)$$

$$v' = \omega' r_\xi \text{ при } r = r_\xi. \quad (12)$$

Здесь $q = (1+i)\sqrt{\pi Re}$. Задача (10)–(12) имеет решение

$$v' = \alpha I_1(qr) + \beta K_1(qr), \quad (13)$$

где I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя;

$$\alpha = -\frac{i\hat{\omega}_\eta K_1(qr_\xi) + \omega' r_\xi K_1(q)}{G_1};$$

$$\beta = \frac{i\hat{\omega}_\eta I_1(qr_\xi) + \omega' r_\xi I_1(q)}{G_1}$$

$$(G_1 = I_1(q)K_1(qr_\xi) - I_1(qr_\xi)K_1(q)).$$

Используя (1), (9), (13), найдем

$$\omega' = i \frac{2\pi \kappa \hat{\omega}_\eta - r_\xi Re G_1 \tilde{\mu} e^{i\varphi}}{qr_\xi (qG_1 - 2\pi \kappa G_2)}. \quad (14)$$

Здесь $G_2 = I_1(q)K_2(qr_\xi) + I_2(qr_\xi)K_1(q)$ (I_2, K_2 – модифицированные функции Бесселя).

Формулами (5), (9), (14) определяется точное решение задачи (1)–(4) о движении гидромеханической системы.

Результаты исследования и их обсуждение

Обратимся к вопросу о синхронизации движения твердых частей гидромеханической системы посредством внешнего силового воздействия на систему. Представим комплексную амплитуду ω' в виде

$$\omega' = \hat{\omega}_\xi e^{i\psi}, \quad (15)$$

где $\hat{\omega}_\xi$ и ψ – соответственно модуль и аргумент амплитуды ω' ($\sin \psi = \text{Imag } \omega' / \hat{\omega}_\xi$, $\cos \psi = \text{Real } \omega' / \hat{\omega}_\xi$). Из (9), (15) следует

$$\omega_\xi = \hat{\omega}_\xi \cos(2\pi\tau + \psi). \quad (16)$$

Синхронность движения пластины ξ и стенки η состоит в том, что при любом значении τ имеет место равенство

$$\cos(2\pi\tau + \psi) = \sin 2\pi\tau. \quad (17)$$

Данное равенство (для любого τ) выполняется тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\sin \psi = -1, \cos \psi = 0. \quad (18)$$

Пусть значения числа Рейнольдса Re велики по сравнению с единицей. Используя (14), получим

$$\omega' \sim -\frac{\tilde{\mu} e^{i\varphi}}{2\pi}, \quad \sin \psi \sim -\sin \varphi,$$

$$\cos \psi \sim -\cos \varphi \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Согласно (18), (19) при больших значениях Re имеет место следующее. Пластина ξ и стенка η движутся синхронно, если управляющий параметр φ удовлетворяет условию

$$\varphi = \pi / 2 \quad (20)$$

(если $\varphi \neq \pi / 2$ синхронность отсутствует). При выполнении (20) синхронное (с движением стенки η) движение пластины ξ происходит с угловой скоростью

$$\omega_\xi = \frac{\tilde{\mu}}{2\pi} \sin 2\pi\tau.$$

(амплитуда угловой скорости ω_ξ вращения пластины ξ зависит от управляющего параметра $\tilde{\mu}$). Внешнее силовое воздействие, обеспечивающее синхронное (с движением стенки η) движение пластины ξ , определяется формулой

$$\mu_{\text{ext}} = \tilde{\mu} \cos 2\pi\tau.$$

Пусть значения числа Рейнольдса Re малы по сравнению с единицей ($Re > 0$). Используя (14), пренебрегая величинами, малыми по сравнению с Re , получим

$$\omega' \sim -i\hat{\omega}_\eta \left\{ 1 + \frac{r_\xi^2 - 1}{4\pi\kappa} \left[\frac{\tilde{\mu}e^{i\varphi}}{\hat{\omega}_\eta} - i\pi(2 + \pi\kappa(r_\xi^2 - 1)) \right] Re \right\},$$

$$\sin \psi \sim -1, \cos \psi \sim \frac{r_\xi^2 - 1}{4\pi\kappa\hat{\omega}_\eta} \left\{ \tilde{\mu} \sin \varphi - \pi\hat{\omega}_\eta [2 + \pi\kappa(r_\xi^2 - 1)] \right\} Re \quad \text{при } Re \rightarrow 0 \quad (21)$$

Согласно (18), (21) при малых значениях Re имеет место следующее.

1. В нулевом приближении (при учете только слагаемых, не зависящих от Re) пластина ξ и стенка η движутся синхронно, независимо от того, каков момент μ_{ext} (независимо от значений параметров $\tilde{\mu}$, φ).

2. В первом приближении (при учете наряду со слагаемыми, не зависящими от Re , также слагаемых, пропорциональных Re) пластина ξ и стенка η движутся синхронно или несинхронно в зависимости от значений управляющих параметров $\tilde{\mu}$, φ . При выполнении соотношения

$$\pi(\hat{\omega}_\eta / \tilde{\mu}) [2 + \pi\kappa(r_\xi^2 - 1)] > 1$$

синхронность движения невозможна. Для значений управляющего параметра $\tilde{\mu}$, при которых имеет место соотношение

$$\pi(\hat{\omega}_\eta / \tilde{\mu}) [2 + \pi\kappa(r_\xi^2 - 1)] \leq 1$$

пластина ξ и стенка η движутся синхронно, если управляющий параметр φ удовлетворяет условию

$$\sin \varphi = \pi(\hat{\omega}_\eta / \tilde{\mu}) [2 + \pi\kappa(r_\xi^2 - 1)] \quad (22)$$

(если $\sin \varphi \neq \pi(\hat{\omega}_\eta / \tilde{\mu}) [2 + \pi\kappa(r_\xi^2 - 1)]$, синхронность отсутствует).

При выполнении (22) возможна реализация синхронного (с движением стенки η) движения пластины ξ с различными (безразмерными) угловыми скоростями $\omega_\xi = \hat{\omega}_\xi \sin 2\pi\tau$:

$$\omega_\xi = \hat{\omega}_\eta \sin 2\pi\tau \quad \text{для } \varphi = \pi/2$$

(угловые скорости вращения пластины ξ и стенки η совпадают);

$$\omega_\xi = \hat{\omega}_\eta \left(1 + \frac{r_\xi^2 - 1}{4\pi\kappa\hat{\omega}_\eta} \tilde{\mu} C Re \right) \sin 2\pi\tau$$

для $0 < \varphi < \pi/2$ (23)

(согласно (23) $\hat{\omega}_\xi > \hat{\omega}_\eta$ (амплитуда угловой скорости вращения пластины ξ больше,

чем амплитуда угловой скорости вращения стенки η));

$$\omega_\xi = \hat{\omega}_\eta \left(1 - \frac{r_\xi^2 - 1}{4\pi\kappa\hat{\omega}_\eta} \tilde{\mu} C Re \right) \sin 2\pi\tau$$

для $\pi/2 < \varphi < \pi$ (24)

(согласно (24) $\hat{\omega}_\xi < \hat{\omega}_\eta$ (амплитуда угловой скорости вращения пластины ξ меньше, чем амплитуда угловой скорости вращения стенки η)).

Здесь

$$C = \frac{1}{\tilde{\mu}} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - \pi^2 \hat{\omega}_\eta^2 [2 + \pi\kappa(r_\xi^2 - 1)]^2}.$$

Точки границ Γ_η и Γ_ξ стенки η и пластины ξ движутся по окружностям со скоростями

$$W_\eta = (R_\eta / T) \hat{\omega}_\eta \sin 2\pi\tau = \hat{W}_\eta \sin 2\pi\tau$$

$$\text{и } W_\xi = (R_\xi / T) \hat{\omega}_\xi \sin 2\pi\tau = \hat{W}_\xi \sin 2\pi\tau.$$

Согласно (24), при том что $\hat{\omega}_\xi < \hat{\omega}_\eta$, имеют место формулы

$$\hat{W}_\xi > \hat{W}_\eta, \quad \text{если } H < 1$$

(при всех значениях τ , кроме $\tau = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$, точки границы Γ_ξ пластины ξ обгоняют точки границы Γ_η стенки η);

$$\hat{W}_\xi < \hat{W}_\eta \quad \text{если } H > 1$$

(при всех значениях τ , кроме $\tau = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$, точки границы Γ_ξ пластины ξ отстают от точек границы Γ_η стенки η);

$$W_\xi = W_\eta, \quad \text{если } H = 1$$

(при всех значениях τ скорости движения точек границ Γ_ξ и Γ_η по окружностям совпадают).

Здесь

$$H = \frac{r_\xi(r_\xi + 1)}{4\pi\kappa\hat{\omega}_\eta} \tilde{\mu} C Re.$$

Внешнее силовое воздействие, обеспечивающее синхронность движения пластины ξ и стенки η , определяется формулами

$$\mu_{\text{ext}} = \tilde{\mu} \cos 2\pi\tau \quad \text{для } \varphi = \pi / 2;$$

$$\mu_{\text{ext}} = \tilde{\mu} \left\{ C \sin 2\pi\tau + \pi \frac{\hat{\omega}_\eta}{\tilde{\Gamma}} \left[2 + \pi \varkappa (r_\xi^2 - 1) \right] \cos 2\pi\tau \right\} \quad \text{для } 0 < \varphi < \pi / 2;$$

$$\mu_{\text{ext}} = \tilde{\mu} \left\{ - C \sin 2\pi\tau + \pi \frac{\hat{\omega}_\eta}{\tilde{\mu}} \left[2 + \pi \varkappa (r_\xi^2 - 1) \right] \cos 2\pi\tau \right\} \quad \text{для } \pi / 2 < \varphi < \pi.$$

Заключение

В работе рассмотрена новая задача о вращательном движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью в присутствии внешнего периодического по времени силового воздействия на систему. Найдено точное решение задачи. Проанализирована динамика системы при больших и малых значениях числа Рейнольдса. Установлена возможность синхронизации вращательного движения твердых частей гидромеханической системы посредством внешнего периодического воздействия. Сформулированы условия, при выполнении которых твердые части гидромеханической системы совершают (или не совершают) синхронное вращательное движение. Обнаружено, что требование синхронности вращательного движения твердых частей системы не является достаточным для однозначного определения вращательного движения свободной твердой части гидромеханической системы.

Результаты работы могут использоваться, в частности, при поиске новых, перспективных подходов к решению актуальных научно-технических проблем.

Список литературы

1. Сенников В.Л. Парадоксальное движение жидкости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 8. Ч. 1. С. 28–33. DOI: 10.17513/mjrfi.11753.
2. Сенников В.Л. О движении вязкой жидкости со свободной границей // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2024. Т. 166. Кн. 1. С. 99–110. DOI: 10.26907/2541-7746.2024.1.99-110.
3. Сенников В.Л. О возможности синхронизации движения твердых частей гидромеханической системы с вязкой жидкостью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2025. № 6. С. 29–32. DOI: 10.17513/mjrfi.13733.
4. Козлов В.Г., Субботин С.В. Осредненное течение, генерируемое ядром, колеблющимся во вращающейся сферической полости // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 1. С. 28–38. DOI: 10.15372/PMTF20180104.
5. Власова О.А., Козлов В.Г., Козлов Н.В. Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // Прикладная

механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 2. С. 39–49. DOI: 10.15372/PMTF20180205.

6. Щипицын В.Д. Колебания неосесимметричного цилиндра в заполненной жидкостью полости, совершающей вращательные осцилляции // Письма в Журнал технической физики. 2020. Т. 46. Вып. 15. С. 43–46. DOI: 10.21883/PJTF.2020.15.49749.18349.

7. Коновалов В.В., Любимова Т.П. Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твердых частиц в жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. Т. 12. № 1. С. 48–56. DOI: 10.7242/1999-6691/019.12.1.5.

8. Любимова Т.П., Паршакова Я.Н., Скуридин Р.В. Численное исследование влияния аксиальных вибраций конечной амплитуды и частоты на течения и деформации поверхности жидкой зоны в условиях невесомости. // Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12. № 4. С. 455–461. DOI: 10.7242/19996691/2019.12.4.39.

9. Коновалов В.В., Любимова Т.П., Прокопьев С.А. Взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости под действием акустических вибраций // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16. № 2. URL: <https://journal.permsc.ru/index.php/ccm/issue/view/217>. С. 141–149. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.2.11.

10. Любимова Т.П., Лепихин А.П., Паршакова Я.Н., Гуальтерри К., Лэйн С.Н., Ру Б. Влияние гидродинамических режимов на смешение вод сливающихся рек // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 3. С. 354–361. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.3.26.

11. Любимова Т.П., Лепихин А.П., Паршакова Я.Н. Численное моделирование отведения высокоминерализованных сточных вод в водные объекты с целью усовершенствования конструкций выпускных устройств // Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12. № 4. С. 427–434. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.4.36.

12. Иванцов А.О., Клименко Л.С., Любимова Т.П., Ру Б. Численное моделирование выпускной трубы двигателя с системой активного шумоподавления // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14. № 4. С. 389–397. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.32.

13. Карпунин И.Э., Козлов В.Г. Осцилляционная динамика границы раздела жидкостей в радиальной ячейке Хеле – Шоу // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64. № 3. С. 62–73. DOI: 10.15372/PMTF202215190.

14. Сенников В.Л. О движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью при периодических воздействиях // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2025. Т. 167. Кн. 1. С. 125–139. DOI: 10.26907/2541-7746.2025.1.125-139.

15. Сенников В.Л. О структуре течения вязкой жидкости при периодических воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33. № 4. С. 531–544. DOI: 10.18500/0869-6632-003163.