



ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ В СИСТЕМЕ КЛЕТОЧНОГО АВТОМАТА 2D И 3D РАЗМЕРНОСТИ

¹Клеммер П. С., ²Рави Кумар, ³Шебанов В. В.

¹Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет транспорта», Москва, Российская Федерация,
e-mail: pavel.klemmer@mail.ru;

²Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет „МИСИС“»,
Москва, Российская Федерация;

³Частное образовательное учреждение высшего образования «Московский университет
имени С. Ю. Витте», Москва, Российская Федерация

В работе проведено сравнение динамики двух стохастических клеточных автоматов, двумерной на квадратной решетке 50×50 и на кубической $30 \times 30 \times 30$. Плотность активных клеток в начале задается единой – 0,25. Каждый вариант модели запускался 50 раз, для верификации модели и усреднения результатов динамики. Для анализа использовались временные ряды числа живых клеток, энтропия Шеннона, ее производная и фазовые траектории, а также анализ кластерной структуры клеточного автомата. По результатам моделирования для двумерной модели клеточного автомата число живых клеток снижается с 722 до 112 (4,5 % площади), энтропия – с 0,866 до 0,255 бит (потеря 71 %), характерное время релаксации ~ 480 шагов. Коэффициент вариации энтропии на финальном участке 35,4 %. Фазовые траектории сходятся к точечному аттрактору за ~ 480 шагов. С другой стороны, в трехмерной модели клеточного автомата финальная численность – 6939 клеток (25,7 % объема), энтропия снижается до 0,822 бит (потеря 15 %). Это значение составляет 82,2 % от максимально возможной энтропии (1 бит) и соответствует высокой степени неопределенности микросостояний, сопоставимой со случайной конфигурацией. Коэффициент вариации энтропии – 1,17 %. Фазовые траектории не сходятся к точечному аттрактору; система демонстрирует метастабильное поведение с сохранением информационной насыщенности. Таким образом, в проведенной численной конфигурации 3D-модель демонстрирует иной режим динамики – метастабильную самоорганизацию с сохранением высокой энтропии, тогда как 2D-модель переходит в диссипативный режим упорядочения.

Ключевые слова: клеточный автомат, фазовая траектория, кластерный анализ, энтропия Шеннона, глобальная энтропия, коэффициент вариации, локальная энтропия

STUDY OF THE BEHAVIOR OF STOCHASTIC ENTROPY IN A 2D AND 3D CELLULAR AUTOMATON SYSTEM

¹Klemmer P. S., ²Ravi Kumar, ³Shebanov V. V.

¹Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
“Russian University of Transport”, Moscow, Russian Federation,
e-mail: pavel.klemmer@mail.ru;

²Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
“National University of Science and Technology MISIS”, Moscow, Russian Federation;

³Private Educational Institution of Higher Education
“Moscow University named after S. Yu. Witte”, Moscow, Russian Federation

This study compares the dynamics of two stochastic cellular automata: a two-dimensional model on a 50×50 square lattice and a three-dimensional model on a $30 \times 30 \times 30$ cubic lattice. The initial density of active cells is uniformly set to 0.25 in both cases. Each model variant was executed 50 times to ensure verification of the model and to obtain averaged dynamic characteristics. The analysis employs time series of living cell counts, Shannon entropy and its time derivative, phase trajectories, and an examination of the cluster structure of the cellular automaton. According to the simulation results, the two-dimensional cellular automaton exhibits a decline in the number of living cells from 722 to 112 (corresponding to 4.5 % of the total area). Entropy decreases from 0.866 to 0.255 bits, representing a 71 % loss, with a characteristic relaxation time of approximately 480 steps. The coefficient of variation of entropy over the final segment reaches 35.4 %. The phase trajectories converge toward a point attractor within roughly 480 steps. Conversely, in the three-dimensional cellular automaton, the final population stabilizes at 6939 cells (accounting for 25.7 % of the total volume). Entropy declines to 0.822 bits, corresponding to a loss of only 15 %. This value constitutes 82.2 % of the maximum possible entropy (1 bit) and indicates a high degree of microstate uncertainty comparable to that of a random configuration. The coefficient of variation of entropy is 1.17 %. The phase trajectories do not converge to a point attractor; instead, the system exhibits metastable behavior while preserving information saturation. Thus, in the numerical configuration considered, the 3D model exhibits a different dynamic regime – metastable self-organization with sustained high entropy – while the 2D model transitions to a dissipative ordering regime.

Keywords: cellular automaton, phase trajectory, cluster analysis, Shannon entropy, variation coefficient, global entropy, local entropy

Введение

Клеточные автоматы (КА) более 50 лет применяются при моделировании сложных систем, где из локальных правил взаимодействия возникают пространственно-временные структуры [1, с. 21–52]. Теоретический анализ КА строится на теории информации: энтропия Шеннона количественно оценивает неопределенность дискретных состояний и их динамику [1, с. 237–240]. Методы изучения самоорганизации сформировались в классификациях правил КА [2, с. 22–25]. Характерный пример – тьюрингова универсальность «Игры в жизнь» Джона Конвея, показавшая вычислительную полноту простых КА [3, с. 89].

Круг задач, охватываемых современными исследованиями КА, достаточно широк. В частности, простейшие модели КА применяются при анализе динамических систем разной физической природы [4]. Примером могут служить методы решения классических уравнений математической физики на гексагональных сетках. Сначала их разработали для двух измерений [5], а затем распространили на трехмерные решетки. Результат – возможность учитывать пространственную анизотропию и граничные условия нестандартного типа [6]. Согласно обзору отечественных публикаций [7], интерес к стохастическим и асинхронным моделям КА растет, однако вопрос о влиянии размерности на информационную динамику проработан недостаточно.

Основное преимущество КА – способность порождать сложную макродинамику из локальных правил. Экспериментально показано, что на основе правил «Игры Жизни» можно строить логические элементы и ячейки памяти в дискретной среде [8]. Для количественной оценки эволюции таких систем широко используют энтропийный анализ. Классификация элементарных КА по энтропийным признакам позволяет выявлять переходы между упорядоченными, сложными и хаотическими режимами даже при асинхронном обновлении [9]. Стохастические эффекты и механизмы памяти в КА на данный момент находятся в центре внимания. Нейросетевые расширения КА, по имеющимся данным, эффективны в задачах обучения с подкреплением, но их энтропийные характеристики изучены слабо [10]. Предварительные данные авторов при сравнении 2D и 3D конфигураций в идентичных начальных условиях выявили выраженную дихотомию в энтропийной динамике; это требует более глубокого статистического обоснования [11]. В свою очередь, память

в локальных правилах открывает возможности для конструирования сложных динамических режимов и управления переходами в распределенных системах [12]. Математическое и программное обеспечение стохастических КА с памятью уже разработано, с его помощью моделируют нелинейные эффекты коллективной синхронизации [13].

Дополнительное направление связано с представлением клеточных автоматов в матричной форме, когда состояние всей решетки обновляется как единая матрица или тензор, а правила задаются композициями линейных операций и поэлементных нелинейностей. Это позволяет использовать оптимизированные библиотеки тензорных вычислений и на порядки ускорять симуляции. В частности, Понтес-Фильо и соавт. [14] предложили общий нейро-вдохновленный фреймворк, в котором стохастические КА, случайные булевы сети и эхо-сети эволюционируют к критическому состоянию, а динамика эффективно реализуется матричными операциями. Такой подход открывает возможности для массового ансамблевого анализа энтропийных и других статистических характеристик крупномасштабных систем, что согласуется с целями настоящей работы.

В свою очередь, в трехмерных системах проблема обостряется. Трехмерные КА усложняют задачу экспоненциальным ростом числа конфигураций, затрудняя расчет энтропии [15]. Систематическое исследование трехмерных аналогов игры «Жизнь» было проведено Бейсом [16], выявившим множество правил и динамических режимов на кубических решетках. Эпидемиологические модели КА показывают зависимость динамики от размерности и топологии [15]. С точки зрения теории информации скорость роста энтропии в многомерных клеточных автоматах строго проанализирована Бургуэтом [17], который ввел понятие перенормированной энтропии и получил оценки для d -мерного случая. Кроме того, связь между кластерной структурой и перколяционными свойствами в вероятностных клеточных автоматах исследована Хартарски [18], что важно для понимания перехода от разреженных конфигураций к связным кластерам. Отсюда возникает необходимость систематически сравнить динамику стохастической энтропии и структурную организацию в 2D и 3D клеточных автоматах.

В работе проведено систематическое сравнение энтропии, фазовых траекторий и кластеров в 2D и 3D стохастических КА при ансамблевом усреднении.

Цель исследования – сравнение динамики стохастических клеточных автоматов 2D и 3D размерностей при идентичных начальных условиях и ансамблевом усреднении, а также выявить влияние размерности решетки на характер эволюции систем.

Материалы и методы исследования

Математические модели

В основе количественного анализа – энтропия Шеннона [1, с. 238]. Для стохастических клеточных автоматов она, как известно, выступает мерой неопределенности. Оценку проводят на двух уровнях: глобальном и локальном.

Сначала – глобальная энтропия. Пусть $\Omega(t) = \{\sigma_i(t)\}_{i=1}^M$ – конфигурация системы на временном шаге t , где M – общее число клеток в решетке, $\sigma_i(t) \in \{0,1\}$ – бинарное состояние i -й клетки (1 – «живая», 0 – «мертвая»). Множество всех возможных глобальных конфигураций обозначим

$$C = \{C_k\}_{k=1}^N,$$

причем полное число микросостояний $N = 2^M$. Тогда глобальная стохастическая энтропия задается классической формулой

$$S(t) = - \sum_{k=1}^N p_k(t) \log_2 p_k(t), \quad (1)$$

где $p_k(t)$ – вероятность реализации k -й конфигурации в момент t .

Прямое вычисление $S(t)$ по формуле (1) для крупных решеток, например

$$50^3 = 125000 \text{ клеток,}$$

невозможно, так как N растет экспоненциально. Выход: локальная оценка энтропии. Берем окрестность клетки (x, y, z) на шаге t . В двумерных задачах это окрестность Мура радиуса 1. Локальный паттерн $N(x, y, z; t)$ – вектор состояний из K_c элементов, где K_c – число соседей (8 в 2D, 26 в 3D). Число уникальных конфигураций такой окрестности – 2^{K_c} . При $K_c = 26$ получаем более 67 млн комбинаций.

Вместо полного перебора всех возможных паттернов применяется оценка частотного распределения локальных конфигураций по ансамблю симуляций. На каждом временном шаге t для каждой клетки (во всех реализациях) фиксируется локальный паттерн – состояния самой клетки и ее соседей в окрестности Мура (8 в 2D, 26 в 3D). Пусть $\{c_j\}$ – множество всех уникальных паттернов, встретившихся хотя бы один раз в ансамбле на шаге t , а $N_{obs}(t)$ – их количество. Относительная частота $f_j(t)$ определяется

как доля клеток во всем ансамбле, окрестность которых совпадает с паттерном c_j :

$$f_j(t) = N_{c_j}(t) / N. \quad (2)$$

где $N_{c_j}(t)$ – число клеток с паттерном c_j в ансамбле на шаге t , N – общее число клеток во всех реализациях.

Тогда локальная энтропия для произвольной клетки, основанная на распределении паттернов по ансамблю, задается формулой

$$S_{ЛОК}(t) = - \sum_{j=1}^{N_{obs}(t)} f_j(t) \log_2 f_j(t). \quad (3)$$

Данная величина не зависит от конкретной клетки и характеризует неопределенность локального микроскопического состояния, усредненную по системе.

Глобальную энтропию системы получают усреднением локальных значений по всем клеткам ансамбля; поскольку $S_{ЛОК}$ одинакова для всех клеток, глобальная энтропия совпадает с (3):

$$S(t) = \frac{1}{M_{total}} \sum_{i=1}^{M_{total}} S_{ЛОК}(r_i, t) = S_{ЛОК}(t), \quad (4)$$

где r_i – координаты i -й клетки. M_{total} – суммарное число клеток во всех реализациях ансамбля.

Описание параметров симуляций

Сравнительную серию экспериментов проводили для 2D и 3D клеточных автоматов. Решетки: квадратная 50×50 и кубическая $30 \times 30 \times 30$. Выбрали их так, чтобы при разной размерности объем вычислений оставался сопоставимым, а кластерные структуры – репрезентативными. Граничные условия везде периодические – это исключает краевые эффекты.

Состояние каждой клетки бинарное: $\sigma_i(t) \in \{0,1\}$, единица соответствует «живой», ноль – «мертвой». Вероятность перехода в состояние 1 на следующем шаге задается логистической функцией от числа живых соседей $n_i(t)$ в окрестности Мура радиуса 1:

$$P_i(t) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(n_i(t) - \theta)]}, \quad (4)$$

Параметр θ – порог активации, β – крутизна функции. Для 2D взяли $\theta = 4$ (половина от 8 соседей), для 3D – $\theta = 12$ (половина от 26). $\beta = 2,0$ в обоих случаях; это значение обеспечивает плавный, но достаточно резкий переход вблизи порога, что типично для моделей с умеренной стохастичностью.

Таблица 1

Параметры численных экспериментов для 2D и 3D КА

Параметр	КА 2D	КА 3D
Размер сетки	50×50	30×30×30
Тип решетки	Квадратная	Кубическая
Граничные условия	Периодические	Периодические
Окрестность (Мура)	8 соседей	26 соседей
Начальная плотность	0,25	0,25
Функция активации	$P = \frac{1}{1 + e^{-2(n-4)}}$	$P = \frac{1}{1 + e^{-2(n-12)}}$
Режим обновления	Частично асинхронный ($\alpha = 0,15$)	Полностью асинхронный + коррелированный шум ($\sigma = 0,05$)
Число независимых запусков	50	50
Длительность симуляции	1000 шагов	1000 шагов
Основные метрики	Число живых клеток, $\langle S(t) \rangle$	Число живых клеток, $\langle S(t) \rangle$

Примечание: составлена авторами на основе полученных данных в ходе исследования.

Начальная плотность живых клеток $\rho_0 = 0,25$ одинакова для всех экспериментов. Актуальные параметры симуляций представлены в табл. 1.

Начальные конфигурации – случайные: для каждой клетки вероятность быть живой равнялась 0,25, реализация – через генератор NumPy. Чтобы сгладить влияние конкретного распределения, каждую модель прогоняли 50 раз; параметры θ , β и ρ_0 при этом не менялись. Длительность прогона – 1000 шагов. Предварительные тесты показали: к этому моменту система либо выходит на квазистационарный режим (3D), либо достигает устойчивого состояния (2D).

Размеры решеток подбирали из соображений баланса, а именно: 50×50 для 2D и 30×30×30 для 3D – достаточно, чтобы наблюдать кластерные структуры, но не слишком велики, чтобы ансамбль из 50 запусков можно было выполнить за приемлемое время. Локальную энтропию считали по окрестности Мура: 8 соседей в 2D, 26 в 3D. Частотное распределение паттернов $\{f_i(t)\}$ оценивали по ансамблю; глобальную энтропию $S(t)$ получали усреднением локальных значений по всем клеткам согласно (3). Дополнительно фиксировали число живых клеток, плотность, проводили кластерный анализ (связные компоненты по 8/26 соседям) и строили фазовые траектории. Реализация – на Python 3.11 в среде Google Colab. Для ускорения использовали компиляцию через Numba (декораторы @jit). Визуализация выполнена с помощью Matplotlib и Seaborn, статистическая обработка – SciPy и pandas.

Результаты исследования и их обсуждение

Результаты численного моделирования 2D и 3D стохастических клеточных автоматов показали: расхождения между размерностями не сводятся к количественным отличиям. Геометрия решетки и структура локальных взаимодействий порождают качественно разные типы динамики. Сравнение проводили по трем основным характеристикам: изменение численности популяции, эволюция энтропии Шеннона, форма фазовых траекторий.

Рисунок 1 отражает усредненные по 50 реализациям временные ряды числа живых клеток. В двумерном случае (Conway B3/S23, сетка 50×50) наблюдается выраженная релаксация: стартовая популяция 722 клетки снижается на 84,6 % и стабилизируется на уровне 112 ± 15 клеток (4,4 % от площади). Высокий коэффициент вариации (CV составил 49,7 %) говорит о значительной стохастичности; формируются разреженные кластерные структуры. В трехмерной модели (Life B56/S4567, объем 30^3) картина принципиально иная: среднее число живых клеток не только не падает, но даже немного возрастает относительно начального уровня (с 6763 до 6939) и стабилизируется вблизи значения 6939 ± 47 клеток, что составляет примерно 25,7 % объема решетки. Коэффициент вариации числа живых клеток в стационарном режиме не превышает 0,68%, что на порядок ниже, чем в двумерном случае, и свидетельствует о высокой статистической устойчивости макроскопического состояния.

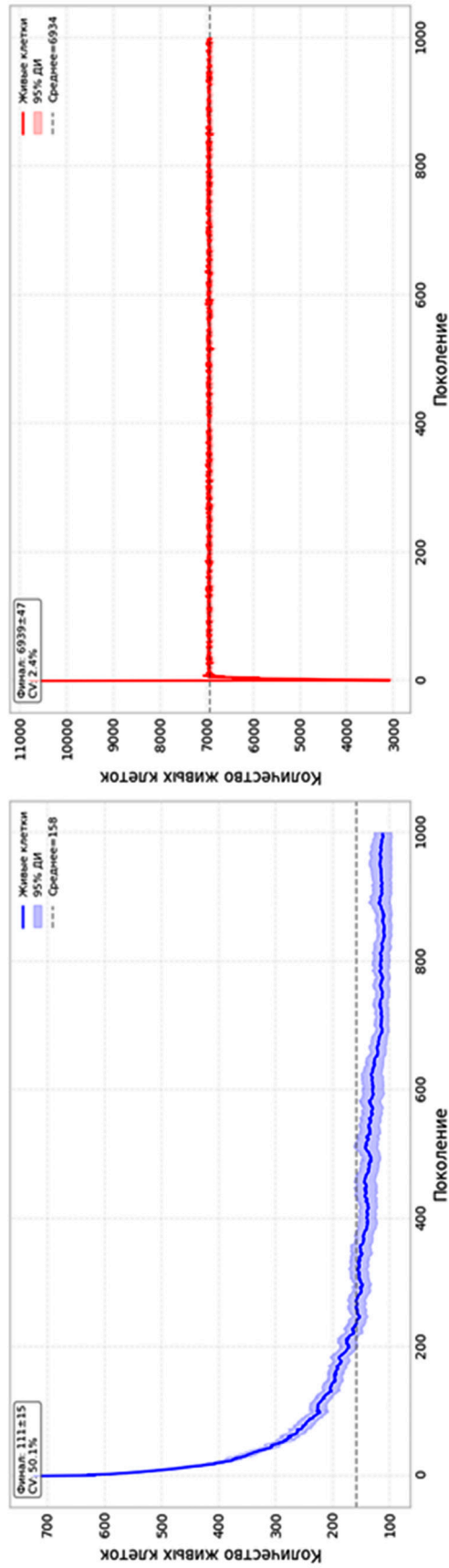


Рис. 1. Динамика числа живых клеток в КА 2D (а) и 3D (б)
 Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

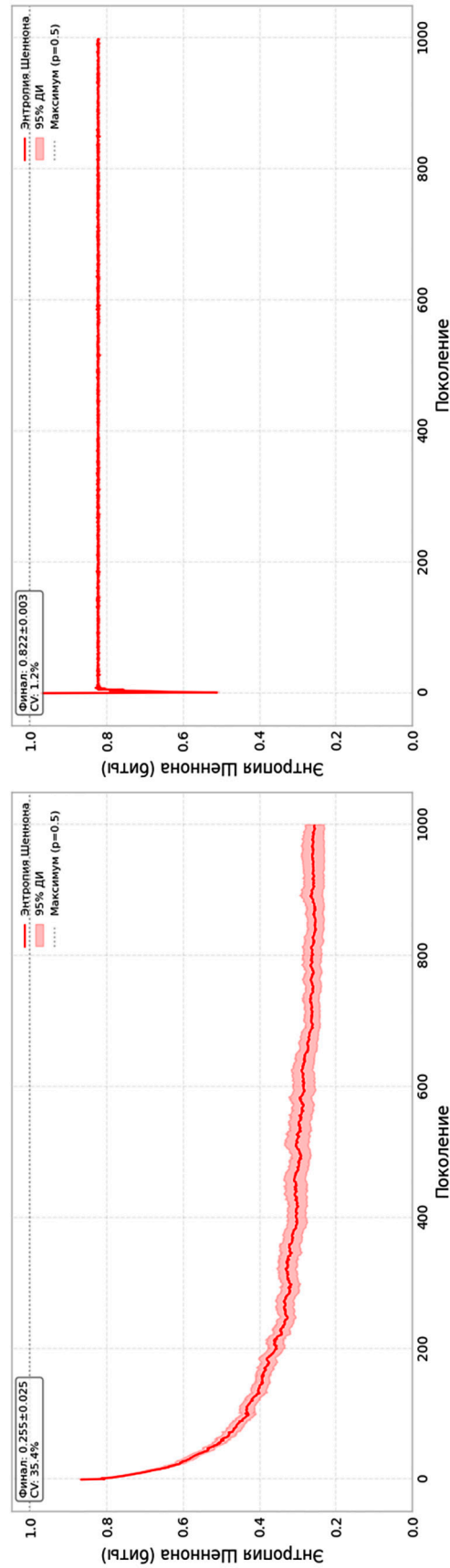


Рис. 2. Динамика стохастической энтропии в 2D (а) и 3D (б) КА
 Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Поддерживается она значительной плотностью активных элементов и непрерывными локальными перестройками в пределах окрестности Мура.

Эволюция информационной энтропии Шеннона (рис. 2) демонстрирует контрастные режимы самоорганизации. Для двумерной системы характерен глубокий спад энтропии: от начального значения 0,866 бит к асимптотическому уровню $0,255 \pm 0,025$ бит (снижение на 0,611 бит). Потеря ~71 % информационной емкости соответствует переходу в режим структурной редукции с формированием разреженных детерминированных паттернов. Коэффициент вариации энтропии в двумерной модели, оцененный как CV временного ряда средней энтропии (S) на последних 200 шагах, составил 35,4 %; CV самой финальной энтропии по ансамблю равен 35,3 % (табл. 2), оба показателя свидетельствуют о высокой остаточной изменчивости. Это довольно высокий показатель, и он говорит о том, что локальная динамика даже при общей тенденции к упорядочению остается стохастической. В трехмерной системе картина иная. Стационарный уровень энтропии здесь зафиксирован на отметке $0,822 \pm 0,003$ бит, что составляет 82,2 % от максимально возможного значения (S_{\max}). Снижение относительно начального – всего 0,149 бит. Оба коэффициента вариации энтропии в трехмерной системе минимальны: 1,2 % для временного ряда и 1,3 % для ансамблевого распределения (табл. 2). Разница между финальными значениями энтропии в 3D и 2D составляет 0,567 бит. Такое расхождение подтверждает, что режимы эволюции принципиально разные.

Столь высокая энтропия для 3D КА указывает на то, что микроскопические состояния системы остаются сильно неопределенными, а локальные паттерны не вырождаются в небольшой набор повторяющихся конфигураций. В рамках качественного анализа динамики клеточных автоматов такую ситуацию допустимо характеризовать как близкую к хаотическому состоянию, понимая под этим не строгую математическую хаотичность, а сохранение макроскопической неупорядоченности, сопоставимой со случайным распределением активных клеток. Об этом же свидетельствуют незатухающие флуктуации производной энтропии (рис. 3) и отсутствие сходимости фазовых траекторий к точечному аттрактору (рис. 4). Напротив, в двумерной модели энтропия падает до 0,255 бит – значения, характерного для сильно разреженных и частично детерминированных конфигураций. В этом

случае доминирует процесс структурной редукции: информационная насыщенность снижается, а динамика приближается к режиму с выраженным преобладанием упорядоченных паттернов.

Производная энтропии по времени (dS/dt) показана на рис. 3. Ее значения позволяют судить о скорости релаксации информационных процессов. Для начального участка характерны отрицательные значения dS/dt . В трехмерной модели этот показатель равен $-25,59 \pm 0,82 \times 10^{-3}$ бит/поколение, в двумерной – $-12,91 \pm 1,16 \times 10^{-3}$ бит/поколение. В двумерной системе флуктуации dS/dt затухают. На последних шагах среднее значение составляет $-0,048 \pm 0,581 \times 10^{-3}$ бит/поколение, амплитуда колебаний $\sigma = 1,71 \times 10^{-3}$ бит/поколение. Это соответствует режиму, близкому к стационарному. В трехмерной системе картина иная. Колебания dS/dt не затухают: размах значений остается в интервале $[-28,2; +35,5] \times 10^{-3}$ бит/поколение, амплитуда $\sigma = 2,18 \times 10^{-3}$ бит/поколение. Среднее значение за последние шаги равно $-0,113 \pm 0,509 \times 10^{-3}$ бит/поколение, то есть практически нуль, но знак колеблется.

Наблюдаемую динамику трехмерного клеточного автомата уместно охарактеризовать как метастабильную, понимая под этим следующее: на протяжении всего времени симуляции (1000 шагов) средняя энтропия (S) остается вблизи 0,822 бит без значимого тренда, коэффициент вариации энтропии на финальном участке не превышает 1,17 %, а амплитуда флуктуаций производной dS/dt составляет $2,18 \times 10^{-3}$ бит/шаг и не затухает (табл. 2). При этом ни в одной из реализаций скользящее среднее энтропии не покидало полосу $\pm 2\sigma$ относительно среднего уровня, то есть характерное время жизни метастабильного состояния превышает 1000 шагов. Такое сочетание макроскопической стабильности и микроскопических перестроек типично для метастабильных режимов в системах с локальными взаимодействиями.

Поскольку энтропия, будучи интегральной характеристикой, не позволяет судить о том, как именно организовано пространственное распределение активных элементов, дополнительно был проведен кластерный анализ с выделением связанных компонент клеточного автомата. Соответствующие количественные оценки приведены в табл. 2. Для двумерной системы обращает на себя внимание кратное сокращение плотности кластеров – с 34,7 до 5,3, то есть более чем в 6 раз. Средний размер кластера при этом сокращается с 8,24 до 7,65 клетки, а корреляционная длина ξ падает с 1,72 до 1,18 ячейки.

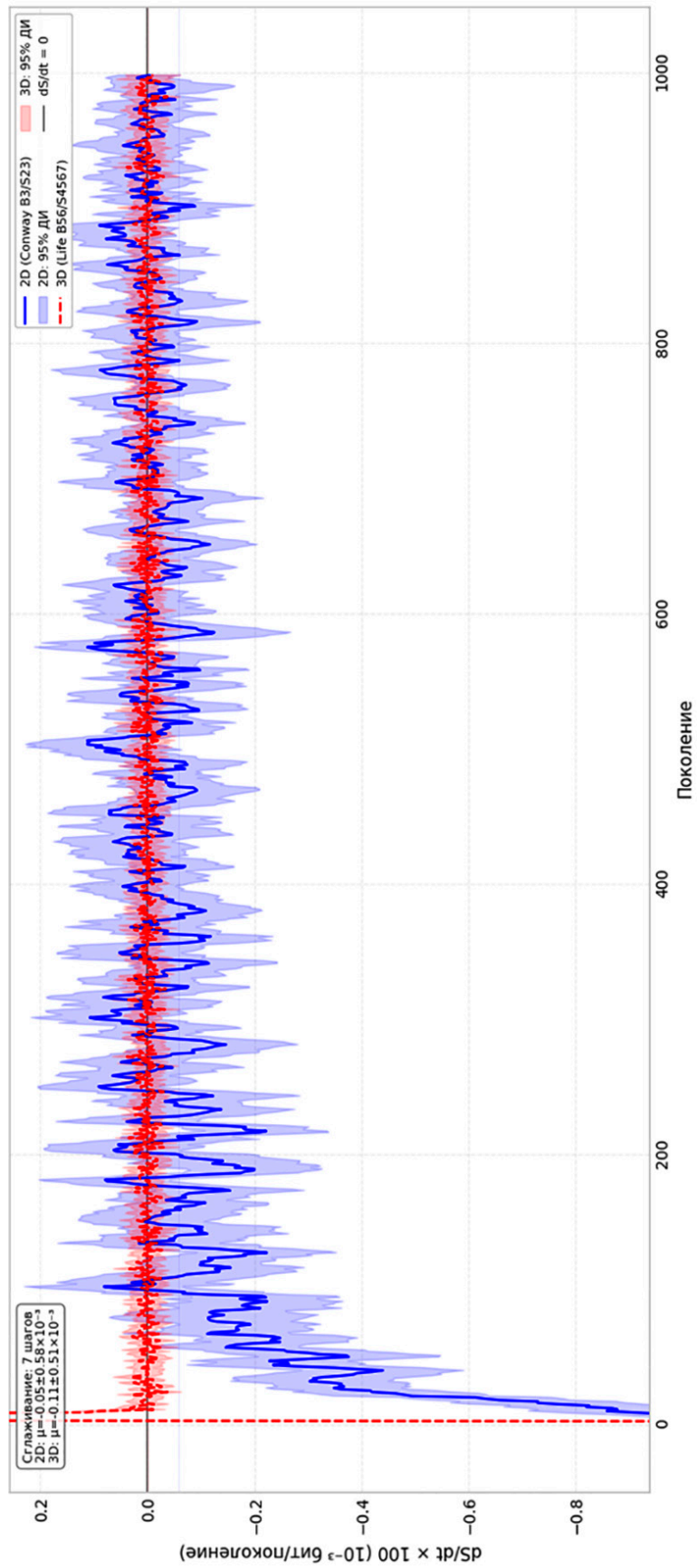


Рис. 3. Сравнение темпов изменения энтропии в 2D и 3D КА (сплошная – 2D, пунктирная линия – 3D)
 Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

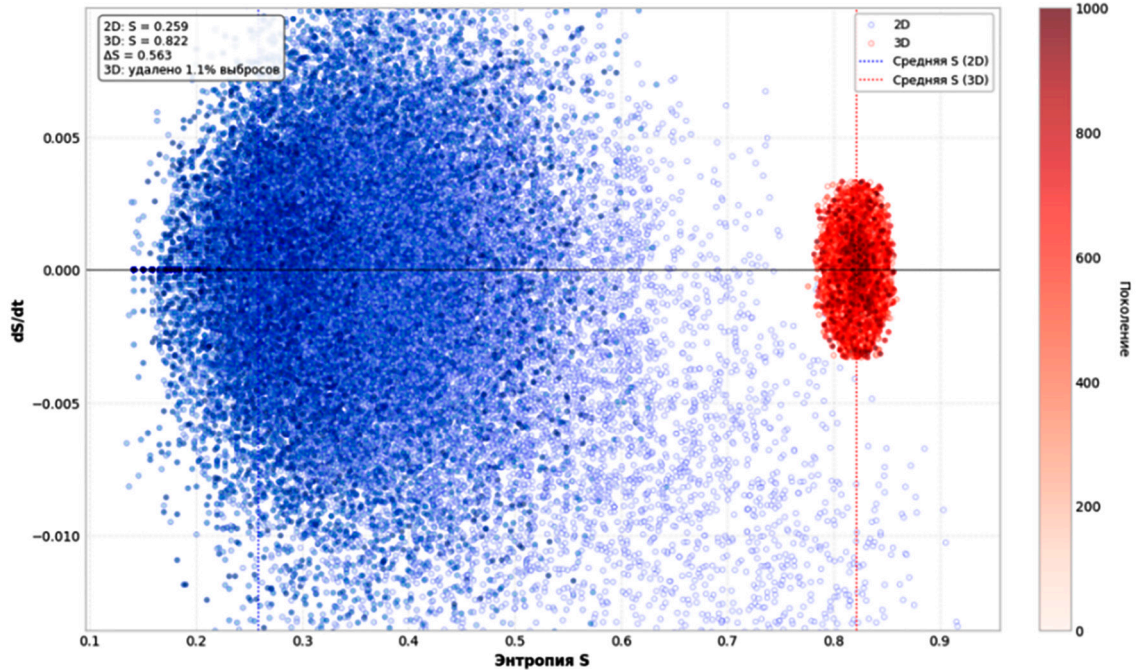


Рис. 4. Фазовый портрет динамики dS/dt от S для 2D и 3D КА
Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Таблица 2

Анализ ключевых метрик статистического анализа динамики 2D и 3D КА

Показатели	2D	3D
Размер решетки	$50 \times 50 = 2500$ ячеек	$30^3 = 27\,000$ ячеек
Среднее число живых клеток ($t = 1000$)	112	6 939
95 % ДИ для среднего	[97, 127]	[6892, 6986]
SD числа живых клеток ($t = 1000$)	55,7	169,8
CV числа живых клеток ($t = 1000$), %	49,7	0,68
Начальная энтропия $\langle S(0) \rangle$, бит	0,866	0,971
Финальная энтропия $\langle S(1000) \rangle$, бит	0,255	0,822
95 % ДИ для финальной энтропии	[0,230, 0,280]	[0,819, 0,825]
SD финальной энтропии	0,090	0,011
CV(S) ансамбля ($t = 1000$), %	35,3	1,3
CV временного ряда $\langle S \rangle$ (последние 200 шагов), %	35,4	1,2
Характерное время релаксации τ , шаги	~ 480	Не достигнуто
Средняя скорость dS/dt ($t = 0-200$), $\times 10^{-3}$ бит/шаг	$12,9 \pm 1,2$ (SD)	$25,6 \pm 0,8$ (SD)
Средняя скорость dS/dt ($t = 800-1000$), $\times 10^{-3}$ бит/шаг	$0,048 \pm 0,581$ (SD)	$0,113 \pm 0,509$ (SD)
Амплитуда флуктуаций dS/dt (σ), $\times 10^{-3}$ бит/шаг	1,71	2,18
Плотность кластеров (абс.)*	$5,34 \pm 0,74$ (SD)	$20,56 \pm 0,14$ (SD)
Средний размер кластера, ед. кл.	$7,65 \pm 0,07$ (SD)	$12,48 \pm 0,03$ (SD)
Доля живых клеток в кластерах, финал	$\sim 38\%$	$\sim 67\%$
Корреляционная длина ξ , ячейки	1,18	1,63

Примечание: составлена авторами на основе полученных данных в ходе исследования.

Все величины вида «среднее \pm интервал»: для числа живых клеток и энтропии указан 95 %-ный доверительный интервал (ДИ) для среднего по ансамблю; для скоростей и кластерных характеристик – стандартное отклонение (SD). CV числа живых клеток вычислен как SD/среднее; CV(S) для последних 200 шагов – это коэффициент вариации временного ряда средней по ансамблю энтропии $\langle S(t) \rangle$.

* Абсолютное количество связанных кластеров на всю решетку: 2500 ячеек для 2D и 27 000 ячеек для 3D. Для сопоставления на 1000 ячеек плотность составляет $\sim 2,14$ (2D) и $\sim 0,76$ (3D).

Динамика, таким образом, отображает картину фрагментации активной фазы: вместо относительно связанных областей мы видим переход к режиму разреженных и слабо взаимодействующих доменов.

В трехмерной модели динамика пространственной структуры выглядит иначе. Плотность кластеров здесь снижается умеренно – с 32,0 до 20,6, средний размер кластера практически не меняется (12,49 против 12,17 клетки), а корреляционная длина ξ сокращается незначительно: с 1,83 до 1,63 ячейки. Отношение финальных значений $\xi_3^D/\xi_2^D \approx 1,38$ показывает, что в трехмерном случае пространственные корреляции оказываются более дальнедействующими; иными словами, объемный характер взаимодействий способствует сохранению целостности кластеров и поддерживает динамическую самоорганизацию, задаваемую правилами Life B56/S4567. Следовательно, в трехмерной среде формируются устойчивые домены активности, для которых характерны локальная самоподдержка и коллективная динамика, тогда как в двумерном варианте преобладает тенденция к структурной редукции и изоляции отдельных паттернов.

Доверительные интервалы (ДИ) для среднего числа живых клеток и средней энтропии построены двумя методами: bootstrap (5000 реплик, процентильный интервал) и нормальная аппроксимация (среднее $\pm 1,96 \times \text{SEM}$); оба подхода дали практически одинаковые результаты, и в табл. 2 приведены интервалы. Коэффициент вариации числа живых клеток вычислен как $SD/\text{среднее}$ по ансамблю на финальном шаге, а $CV(S)$ для последних 200 шагов представляет собой коэффициент вариации временного ряда усредненной по ансамблю энтропии $\langle S(t) \rangle$.

Сравнение финальных распределений числа живых клеток и энтропии между 2D и 3D по U-критерию Манна – Уитни дало $p < 10^{-5}$ ($N = 50$). Доверительные интервалы в табл. 2 построены бутстрепом (5000 реплик, процентильный метод) и практически совпадают с нормальной аппроксимацией (среднее $\pm 1,96 \cdot \text{SEM}$). При повторении всей серии из 50 прогонов с 10 разными стартовыми распределениями системы, средние значения числа клеток менялись не более чем на 2 % (2D) и 0,5 % (3D), а средней энтропии – не более чем на 1,5 % и 0,2 % соответственно.

Фазовый портрет в координатах $dS/dt - S$ приведен на рис. 4. В двумерной системе после завершения переходного процесса траектория локализуется в компактной области с координатами $S \approx 0,259 \pm 0,025$ бит

и $dS/dt \approx 0$. С точки зрения качественного анализа динамических систем такое поведение указывает на существование аттрактора – устойчивого макросостояния, к которому стремится ансамбль реализаций. Мы сознательно избегаем термина «точечный аттрактор» в строгом смысле, поскольку остаточные флуктуации энтропии свидетельствуют о сохранении стохастической компоненты. Тем не менее в пределах наблюдаемого временного окна система 2D демонстрирует выраженную сходимость к стационарному распределению с малым средним дрейфом, что оправдывает употребление понятия аттрактора в контексте статистической физики неравновесных систем. В трехмерной системе траектория локализована в узкой зоне со средним значением энтропии $0,822 \pm 0,003$ бит, флуктуации производной минимальны (0,003), однако сходимости к точке не наблюдается. Разность средних энтропий между 3D и 2D равна 0,564 бит.

Далее на рис. 5 приведена фазовая траектория в координатах плотность – энтропия ($\rho - S$). Для двумерной модели: начальная точка (0,289; 0,866), конечная – (0,045; 0,255). Длина траектории $L = 0,658$. Потеря энтропии – 71 %. В трехмерной модели начальные значения (0,25; 0,971), конечные – (0,257; 0,822). Длина $L = 0,868$, отношение $L_3^D/L_2^D = 1,31$.

Несмотря на то, что траектория в трехмерном случае оказывается длиннее, это не свидетельствует о более выраженной эволюции макросостояния: на протяжении всего пути энтропия остается высокой (0,822), а плотность активных клеток меняется незначительно. Наблюдаемое увеличение траектории отражает скорее богатство микроскопических перестроек, которые не приводят к заметному упорядочению, но поддерживают высокую информационную насыщенность. Для двумерной модели за 480 шагов популяция снижается с 722 до 112 ± 15 клеток (4,5 % площади решетки). Энтропия падает на 0,611 бит (71 % от исходной). Фазовые траектории выходят на точечный аттрактор ($S = 0,255 \pm 0,025$ бит). Коэффициент вариации составляет 49,7 %. Структура становится разреженной, преобладают детерминированные паттерны. В свою очередь, для трехмерной модели картина иная. Финальная численность – 6939 ± 47 клеток (25,7 % объема). Энтропия снижается на 0,149 бит (15 %), финальное значение – $0,822 \pm 0,003$ бит (82,2 % от максимума). Коэффициент вариации – 0,68 %. Система остается в квазистационарном режиме, выраженной тенденции к упорядочению не наблюдается.

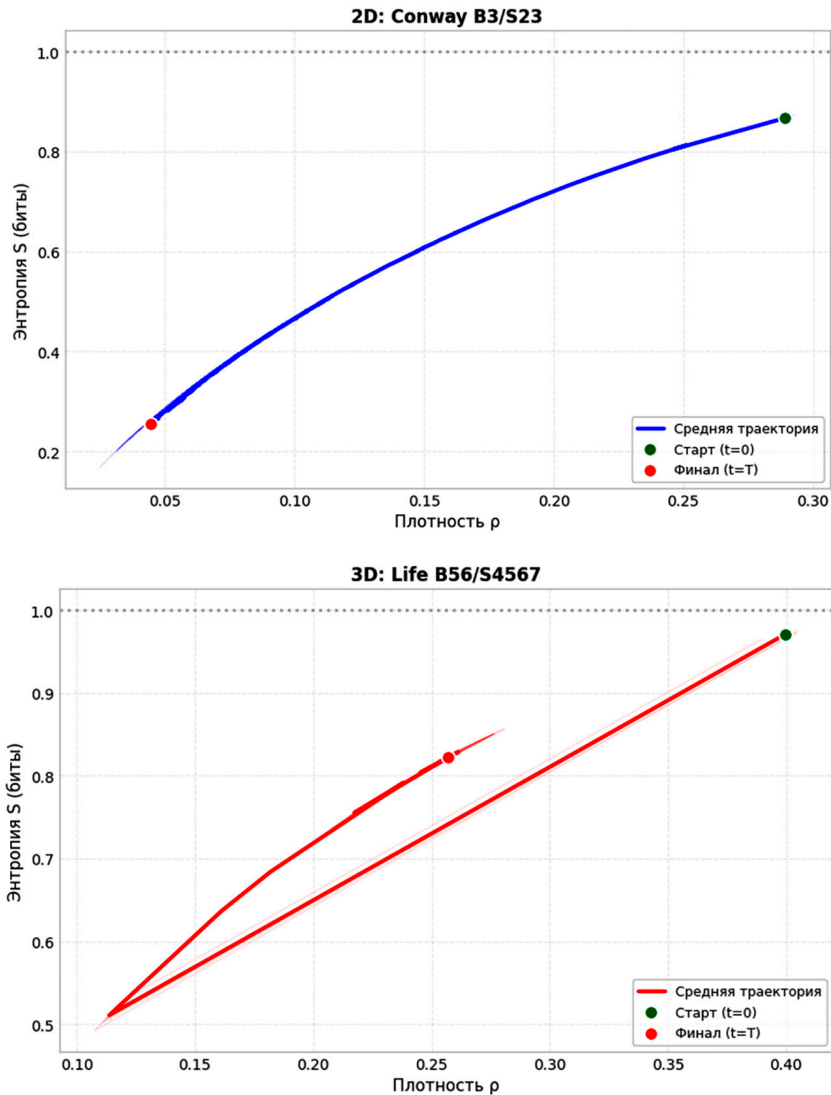


Рис. 5. Фазовая траектория в пространстве «плотность активных клеток – энтропия» ($\rho-S$) для 2D и 3D КА

Примечание: составлен авторами по результатам данного исследования

Кластерный анализ дал следующие соотношения. В трехмерной модели средний размер кластера – 12,48 клетки, в двумерной – 7,65 (разница 63 %). Корреляционная длина в 3D составляет 1,63 ячейки, в 2D – 1,18 (на 38 % выше). Доля живых клеток, входящих в кластеры, в 3D – 67 %, в 2D – 38 %. Длина фазовой траектории в координатах ($\rho-S$) для 3D оказалась 0,868, а отношение $L_3^D/L_2^D = 1,31$. В исследованной конфигурации 3D-модель демонстрирует качественно иной тип динамики: вместо диссипативной релаксации, наблюдаемой в 2D, формируется метастабильная самоорганизация с устойчивыми объемными доменами, поддерживающими коллективную активность. Следует, однако, отметить, что данное различие может быть следстви-

ем совместного влияния размерности и режима обновления; для выделения чистого эффекта размерности необходимы дополнительные контрольные эксперименты.

Заключение

В работе проведено сравнение динамики двумерного и трехмерного стохастических клеточных автоматов при идентичных начальных условиях и усреднении по 50 независимым реализациям. Ключевой результат состоит в том, что в исследованных условиях размерность решетки оказалась сопряжена с качественным различием наблюдаемых динамических режимов. Например, 2D система демонстрирует диссипативное поведение – число активных ячеек падает с 722 до 112 (4,5 % решетки), энтропия сни-

жаются с 0,866 до 0,255 бит (потеря 71%), а фазовая траектория за ~480 шагов выходит на точечный аттрактор. При этом сохраняется высокая вариабельность остаточной активности ($CV = 49,7\%$). В 3D клеточном автомате, напротив, активность не затухает: финальная популяция составляет 6939 ячеек (25,7 % объема), энтропия остается близкой к максимальной (0,822 бит, потеря всего 15 %), а фазовые траектории после 1000 шагов не сходятся, совершая метастабильные блуждания. Статистическая устойчивость в трехмерном случае оказывается на порядок выше ($CV = 0,68\%$, что в десятки раз ниже, чем в 2D). Кластерный анализ дополняет картину, средний размер кластера в 3D составляет 12,48 против 7,65 клеток в 2D, корреляционная длина выше на 38 %, а доля живых клеток, входящих в кластеры, достигает 67 % против 38 % в 2D случае.

В проведенных опытах трехмерная модель демонстрирует метастабильную динамику с высокой энтропией, тогда как двумерная – быстрый переход к упорядоченному состоянию. Поскольку наряду с размерностью различались и протоколы обновления, однозначно приписать этот контраст повышению размерности нельзя; необходимы контрольные эксперименты с унификацией режима обновления. Тем не менее выявленные соотношения свидетельствуют о топологической обусловленности устойчивости неравновесных конфигураций. Дальнейший интерес представляет изучение репродуктивных свойств многомерных кластеров и их способности формировать функционально активные среды с длительным сохранением коллективной динамики.

Список литературы

1. Ilachinski A. Cellular automata: a discrete universe. World Scientific Publishing Company, 2001. 808 p. URL: http://lib.ysu.am/disciplines_bk/10601885498bd77aa5069c30185beabd.pdf (дата обращения: 12.03.2026). ISBN 981-02-4623-4.
2. Wolfram S. A New Kind of Science. Champaign, IL: Wolfram Media, 2002. 1197 p. URL: <https://horizons-2000.org/92.%20Misc%20Files/Reading/Wolfram%20-%20A%20New%20Kind%20of%20Science.pdf> (дата обращения: 12.03.2026). ISBN 978-1-57955-008-0.
3. Rendell P. Turing Machine Universality of the Game of Life. Cham: Springer International Publishing, 2016. 182 p. DOI: 10.1007/978-3-319-19842-2. ISBN 978-3-319-19841-5.
4. Лобанов А.И. Модели клеточных автоматов // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. № 3. С. 273–293. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/1726/> (дата обращения: 20.03.2026). DOI: 10.20537/2076-7633-2010-2-3-273-293.
5. Матюшкин И.В. Клеточно-автоматные методы решения классических задач математической физики на гексагональной сетке. Ч. 1 // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9. № 2. С. 167–186. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2554/> (дата обращения: 20.03.2026). DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-2-167-186.
6. Матюшкин И.В. Клеточно-автоматные методы решения классических задач математической физики на гексагональной сетке. Ч. 2 // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9. № 4. С. 547–566. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2592/> (дата обращения: 20.03.2026). DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-4-547-566.
7. Матюшкин И.В., Заплетина М.А. Обзор по тематике клеточных автоматов на базе современных отечественных публикаций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 1. С. 9–57. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2764/> (дата обращения: 20.03.2026). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-9-57.
8. Малинецкий Г.Г., Щадинский Д.М. Конструирование вычислительного устройства на основе игры «Жизнь» // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 143. С. 1–14. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-143&lg=r> (дата обращения: 20.03.2026). DOI: 10.20948/prepr-2019-143.
9. Lei Q., Lee J., Huang X., Kawasaki S. Entropy-Based Classification of Elementary Cellular Automata under Asynchronous Updating: An Experimental Study // Entropy. 2021. Vol. 23. Is. 2. Art. 209. DOI: 10.3390/e23020209.
10. Мокрецов Н.С., Татарникова Т.М. Самоорганизующиеся нейронные клеточные автоматы для обучения с подкреплением и эволюционного развития // Известия СПбГУ «ЛЭТИ». 2023. Т. 16. № 7. С. 68–75. URL: <https://izv.etu.ru/ru/archive/2023-t.-16/n.-7/68-75> (дата обращения: 20.03.2026). DOI: 10.32603/2071-8985-2023-16-7-68-75.
11. Шебанов В.В. Исследование поведения системы стохастической энтропии системы клеточного автомата от исходной конфигурации распределения живых клеток // Исследования молодых ученых: материалы XCIV Международной научной конференции (г. Казань, январь 2025 г.). Казань: Молодой ученый, 2025. С. 1–12. URL: <https://moluch.ru/conf/stud/archive/528/18816> (дата обращения: 20.03.2026). EDN: SBNLTT.
12. Martinez G.J., Adamatzky A., Alonso-Sanz R. Designing complex dynamics in cellular automata with memory // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2013. Vol. 23. Art. 1330035. DOI: 10.1142/S0218127413300358.
13. Алешкин А.С., Обухова А.Г., Жуков Д.О. Математическое и программное обеспечение стохастических клеточных автоматов с памятью // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13. № 2. С. 25–39. DOI: 10.25559/SITITO.2017.2.220. EDN: WXYHMS.
14. Pontes-Filho S. et al. A neuro-inspired general framework for the evolution of stochastic dynamical systems: Cellular automata, random Boolean networks and echo state networks towards criticality // Cognitive Neurodynamics. 2020. Vol. 14. Is. 5. P. 657–674. DOI: 10.1007/s11571-020-09600-x.
15. Шабунин А.В. Пространственная и временная динамика возникновения эпидемий в гибридной SIRS+V модели клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31. Вып. 3. С. 271–285. DOI: 10.18500/0869-6632-003042. EDN: PBXBCY.
16. Bays C. A note about the discovery of many new rules for the Game of Three-Dimensional Life // Complex Systems. 2006. Vol. 16. P. 381–386. URL: <https://content.wolfram.com/sites/13/2023/02/16-4-7.pdf> (дата обращения: 12.05.2026). DOI: 10.25088/ComplexSystems.16.4.381.
17. Burguet D. Rescaled entropy of cellular automata // Nonlinearity. 2021. Vol. 34. Is. 7. P. 4897–4922. DOI: 10.1088/1361-6544/abfeab.
18. Hartarsky I. Bootstrap Percolation, Probabilistic Cellular Automata and Sharpness // Journal of Statistical Physics. 2022. Vol. 187. Is. 3. P. 21. DOI: 10.1007/s10955-022-02922-6.

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Финансирование: Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования.

Financing: The research was performed without external funding.