

СТАТЬЯ

УДК 519.713



CC BY 4.0

РОЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ В ДИНАМИКЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

¹Клеммер П. С., ²Шебанов В. В.

¹Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет транспорта», Москва, Российская Федерация,
e-mail: pavel.klemmer@mail.ru;

²Частное образовательное учреждение высшего образования «Московский университет
имени С. Ю. Витте», Москва, Российская Федерация

В работе исследована динамика стохастических клеточных автоматов с асинхронным вероятностным обновлением в двумерной и трёхмерной пространственных решётках при локализованных начальных условиях. Целью работы являлось установление влияния размерности пространства и глобальной начальной плотности активных клеток (в диапазоне 0,10–0,25) на характер эволюции макроскопических характеристик – доли живых клеток и информационной энтропии Шеннона. Проведено численное моделирование ансамблей из 50 независимых реализаций для каждой конфигурации, выполнен анализ временных рядов, фазовых портретов в координатах (S , dS/dt) и траекторий в плоскости (ρ , S), вычислены времена релаксации, коэффициенты вариации и длины фазовых путей. Установлено, что трёхмерная система демонстрирует ускоренную релаксацию средней плотности к квазистационарному уровню (τ в 3D существенно меньше, чем в 2D) при сохранении высокой энтропии и незатухающих флуктуаций, формируя квазистационарный флуктуирующий режим. Двумерный автомат, напротив, проявляет диссипативный характер с монотонным снижением плотности и энтропии, высокой чувствительностью к стохастическим флуктуациям и сходимостью к точечному аттрактору. Выявленные различия объяснены топологическими особенностями границы начального очага и координационным числом решётки. Результаты подчёркивают фундаментальную роль пространственной размерности в процессах самоорганизации дискретных активных сред.

Ключевые слова: квазистационарное состояние, самоорганизация, клеточный автомат, стохастическая энтропия Шеннона, квазистационарность, локализованные начальные условия, фазовый портрет, 2D/3D-моделирование

THE ROLE OF SPATIAL DIMENSION IN THE DYNAMICS OF STOCHASTIC CELLULAR AUTOMATA WITH LOCALIZED INITIAL CONDITIONS

¹Klemmer P. S., ²Shebanov V. V.

¹Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
“Russian University of Transport”, Moscow, Russian Federation, e-mail: pavel.klemmer@mail.ru;

²Private Educational Institution of Higher Education
“Moscow University named after S. Yu. Witte”, Moscow, Russian Federation

This study investigates the dynamics of stochastic cellular automata with asynchronous probabilistic updating on two- and three-dimensional spatial lattices under localized initial conditions. The aim of the work was to determine how the spatial dimension and the global initial density of active cells (in the range of 0.10–0.25) affect the evolution of macroscopic characteristics – namely, the fraction of living cells and the Shannon information entropy. Numerical simulations were performed for ensembles of 50 independent realizations for each configuration. Time series, phase portraits in the coordinates (S , dS/dt), and trajectories in the (ρ , S) plane were analyzed; relaxation times, coefficients of variation, and phase-path lengths were computed. It is found that the three-dimensional system exhibits accelerated relaxation of the mean density to a quasi-stationary level (τ in 3D is significantly smaller than in 2D) while maintaining high entropy and undamped fluctuations, thus forming a quasi-stationary fluctuating regime. In contrast, the two-dimensional automaton shows a dissipative nature with a monotonic decrease in density and entropy, high sensitivity to stochastic fluctuations, and convergence to a point attractor. The observed differences are explained by the topological features of the initial cluster boundary and the lattice coordination number. The results highlight the fundamental role of spatial dimensionality in the self-organization of discrete active media.

Keywords: quasi-stationary state, self-organization, cellular automaton, Shannon stochastic entropy, quasi-stationarity, localized initial conditions, phase portrait, 2D/3D modeling

Введение

Понимание того, как из локальных правил рождается глобальная упорядоченность, давно находится в фокусе вычислительной физики. Клеточные автоматы (КА)

остаются удобным инструментом для таких исследований благодаря своей дискретной природе и богатству коллективных режимов. Фундаментальная классификация, предложенная С. Вольфрамом [1], разде-

лила элементарные КА на четыре класса – от тривиально однородных до хаотических и сложных. Общая теория КА как дискретных динамических систем подробно изложена в работе А. Илацинского [2]. Одним из важнейших результатов стало доказательство универсальности по Тьюрингу для игры «Жизнь» [3], что показало принципиальную вычислительную мощность даже простых автоматных правил.

Для количественного анализа разнообразия динамик активно используются энтропийные подходы. В частности, К. Лэй с соавторами [4] предложили классификацию элементарных КА при асинхронном обновлении, основанную на поведении энтропии. В работе [5] развили информационно-теоретический взгляд на классификацию клеточных автоматов. Обзор математических моделей КА и их приложений представлен в работе А. И. Лобанова [6]. Отдельного внимания заслуживают клеточно-автоматные методы решения задач математической физики на гексагональных сетках, детально описанные И. В. Матюшкиным (в двух частях) [7; 8], а также обзор современных отечественных публикаций по КА [9]. Важным направлением является изучение стохастических и термодинамических свойств КА. К. Поморски и Д. Котула [10] исследовали термодинамику стохастической версии игры «Жизнь», выявив аналогии с фазовыми переходами. А. С. Алешкин с соавторами [11] разработали математическое и программное обеспечение для стохастических КА с памятью. О. Л. Бандман [12] проанализировал режимы функционирования асинхронных КА, моделирующих нелинейную пространственную динамику. Предшествующие работы самих авторов [13] были посвящены систематическому исследованию поведения стохастической энтропии в двумерных и трёхмерных КА.

Прикладные аспекты КА охватывают широкий круг задач. С. К. Саруханян [14] предложил подход к численной оценке адекватности трёхмерной клеточно-автоматной модели диффузии вещества. Н. М. Ершов и А. М. Попов [15] применили стохастические блочные КА с окрестностью Маркова для моделирования химических и биологических систем. Влияние исходной конфигурации распределения живых клеток на стохастическую энтропию системы КА было исследовано В. В. Шебановым [16]. Наконец, А. А. Шибков и С. С. Кочегаров [17] использовали клеточно-автоматное моделирование для изучения эволюции фрактального коррозионного фронта. Несмотря на обилие работ, большинство численных экспериментов со стохастическими КА опирается

на однородные начальные условия с фиксированной глобальной плотностью активных клеток по всей решётке. Однако во многих реальных процессах активация нейронного ансамбля, рост опухолевого очага, локальное возгорание, активность изначально сосредоточены в ограниченной пространственной области. Подчеркнём, эти примеры приведены исключительно для мотивации; наша модель не воспроизводит специфику нейронных, онкологических или горючих сред (общие подходы к такому моделированию можно найти в обзорах [6; 9]). Вопрос о том, как меняется эволюция КА при переходе от равномерного распределения к компактному очагу и какую роль в этом играет размерность пространства (2D против 3D), остаётся недостаточно изученным.

Цель настоящей работы – определить характер динамики стохастического клеточного автомата с локализованным начальным условием в зависимости от размерности решётки и глобальной начальной плотности активных клеток. Для этого решаются следующие задачи: анализ временных рядов доли живых клеток $\rho(t)$ и глобальной энтропии Шеннона $S(t)$, построение фазовых портретов в координатах $(S, dS/dt)$ и (ρ, S) , вычисление времени релаксации τ и сравнение статистических характеристик стационарных режимов по ансамблям независимых реализаций.

Описание математической модели

Рассматривается стохастический КА на пространственной решётке размерности $d = 2$ или $d = 3$. Каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: $\sigma_i = 1$ («живая») или $\sigma_i = 0$ («мёртвая»). Время t дискретно, $t = 0, 1, 2, \dots, N$. Состояние всей системы в момент t задаётся конфигурацией $\Omega(t) = \{\sigma_i(t)\}$. Эволюция клеток определяется вероятностным правилом, зависящим от числа живых соседей в окрестности Мура. Для клетки i на шаге t вычисляется количество $n_i(t)$ соседних клеток, находящихся в состоянии 1. В двумерном случае окрестность Мура включает 8 соседей, в трёхмерном – 26 соседей.

Вероятность $P_i(t)$ того, что клетка i окажется живой на следующем временном шаге, задаётся сигмоидной (логистической) функцией:

$$P_i(t) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta((n_i) - \theta))}, \quad (1)$$

где θ – пороговое число соседей (при $n_i = \theta$ вероятность активации равна 0,5), β – параметр крутизны (чем больше β , тем ближе правило к детерминированному пороговому).

Обновление состояний происходит асинхронно: на каждом временном шаге каждая клетка независимо с вероятностью α выбирается для попытки изменения состояния. Выбранная клетка переходит в состояние 1, если случайное число $\xi \sim U[0,1]$ меньше $P_i(t)$; в противном случае переходит в 0. Клетки, не выбранные для обновления, сохраняют своё текущее состояние. Параметр α регулирует степень синхрон-

ности: $\alpha = 1$ соответствует полностью синхронному обновлению, малые α – сильно асинхронному.

Основной характеристикой глобальной динамики системы является доля живых клеток (плотность):

$$\rho(t) = \frac{1}{M} \sum_i \sigma_i(t), \quad (2)$$

где M – общее число клеток в решётке.

В качестве информационной меры используется энтропия по плотности:

$$S(t) = H(\rho(t)) = -\rho(t) \cdot \log_2 \rho(t) - (1 - \rho(t)) \log_2 (1 - \rho(t)). \quad (3)$$

Подчеркнём: $S(t)$ – это бинарная энтропия Шеннона, вычисленная по глобальной доле живых клеток $\rho(t)$. Она не является мерой пространственной сложности (не учитывает взаимное расположение активных клеток) и чувствительна только к изменению средней активности. Такая мера вычислительно проста и удобна для массовых ансамблевых расчётов, особенно в трёхмерном случае, где полный пространственный анализ потребовал бы существенно больших ресурсов.

Поскольку каждая реализация стохастического КА содержит случайную составляющую, анализ проводится на ансамбле из N независимых запусков с одинаковыми начальными условиями. Для каждого момента времени t вычисляются средние по ансамблю:

$$\langle \rho_k(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k(t), \langle S(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k(t), \quad (4)$$

где $\rho_k(t)$ – плотность активных клеток в k -й реализации на шаге t . Аналогично вычисляется средняя энтропия, где $S_k(t) = H(\rho_k(t))$ согласно формуле (3).

Стационарные значения ρ_∞ и S_∞ определяются дополнительным усреднением $\langle \rho(t) \rangle$ и $\langle S(t) \rangle$ по заключительному интервалу моделирования ($t = 801, \dots, 1000$).

Формула для времени релаксации τ :

$$\tau = \min \left\{ t \mid \left| \langle \rho(t) \rangle - \rho_\infty \right| < \frac{\left| \langle \rho(0) \rangle - \rho_\infty \right|}{e} \right\}, \quad (5)$$

где ρ_∞ – стационарная средняя плотность, вычисленная по интервалу $t = 801 \dots 1000$.

Время релаксации τ определяется как наименьший номер шага t , для которого выполняется условие

$$\left| \langle \rho(t) \rangle - \rho_\infty \right| < \left| \langle \rho(0) \rangle - \rho_\infty \right| / e,$$

где e – основание натурального логарифма.

Длина фазовой траектории в плоскости (ρ, S) вычисляется как

$$L = \sum_{t=1}^T \left[\left(\langle \rho(t) \rangle - \langle \rho(t-1) \rangle \right)^2 + \left(\langle S(t) \rangle - \langle S(t-1) \rangle \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

Коэффициент вариации стационарной плотности $CV = \sigma_\rho / \rho_\infty$, где σ_ρ – стандартное отклонение значений ρ_k , усреднённых по последним 100 шагам для каждой реализации.

$$\sigma_\rho = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left(\rho_k^{\text{стац}} - \rho_\infty \right)^2}, \quad (7)$$

где $\rho_k^{\text{стац}}$ – средняя плотность k -й реализации на заключительном интервале.

Для количественной оценки пространственной структуры вводится размер крупнейшего кластера $C_{\max}(t)$ – число клеток в наибольшем связном (по окрестности Мура) множестве живых клеток, а также корреляционная длина ξ , оцениваемая по спаду радиальной функции корреляции $g(r)$:

$$g(r) = \frac{\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{|i-j|=r} - \rho^2}{\rho(1-\rho)}, \quad (8)$$

где усреднение проводится по всем парам клеток на расстоянии r .

Корреляционная длина ξ определяется из условия $g(r) \propto \exp(-r/\xi)$ на начальном участке.

Параметры симуляций

Численные эксперименты проводились для 2D и 3D КА с асинхронным вероятностным обновлением. Размеры решёток выбраны следующие: 50×50 клеток для 2D и $30 \times 30 \times 30$ клеток для 3D. Граничные условия задавались периодическими, однако за время наблюдения (1000 шагов) влияние границ на динамику центрального очага оставалось пренебрежимо малым.

Параметры логистического правила перехода (1) задавались индивидуально для каждой размерности и приведены в таблице 1 вместе с остальными параметрами экспериментов.

Таблица 1

Параметры численных экспериментов для КА

Параметр	2D	3D
Размер решётки, L	50×50	$30 \times 30 \times 30$
Порог активации, θ	4,00	13,73
Крутизна сигмоиды, β	2,00	0,15
Вероятность обновления, α	0,20	0,15
Плотность в очаге, $\rho_{\text{очаг}}$	0,92	
Фоновая плотность, $\rho_{\text{фон}}$	0,025	
Целевые $\rho_0^{\text{глоб}}$	0,10; 0,15; 0,20; 0,25	
Радиус очага для $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,10$	8	8
Радиус очага для $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,15$	11	10
Радиус очага для $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,20$	12	11
Радиус очага для $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,25$	14	12
Число реализаций, N	50	
Длительность реализации, T	1000 шагов	

*Источник: составлено авторами.

Начальная конфигурация формировалась как локализованный очаг высокой плотности в центре решётки. Внутри очага (круг в 2D или сфера в 3D) каждая клетка объявлялась живой с вероятностью $\rho_{\text{очаг}} = 0,92$. Вне очага задавался разреженный случайный фон с вероятностью $\rho_{\text{фон}} = 0,025$ на клетку. Радиус очага r подбирался таким образом, чтобы средняя доля живых клеток по всей решётке в начальный момент равнялась заданному $\rho_0^{\text{глоб}}$. Для этого решалось уравнение баланса объёмов:

$$\rho_0^{\text{глоб}} = \frac{V_{\text{очаг}} \cdot \rho_{\text{очаг}} + \rho_{\text{фон}} (V_{\text{общ}} - V_{\text{очаг}})}{V_{\text{общ}}}, \quad (9)$$

где $V_{\text{общ}}$ – общее число клеток, $V_{\text{очаг}}$ – объём очага, выражаемый через радиус, $\rho_{\text{фон}} = 0,025$ – фоновая плотность вне очага.

Программная реализация выполнена на языке Python 3.11 в среде Google Colab. Для ускорения матричных операций и вычисления свёрток применялась библиотека NumPy (версия 1.24). Визуализация результатов осуществлялась средствами Matplotlib (3.7) и Seaborn (0.12). Статистическая обработка данных проводилась с использованием модуля SciPy.stats. Генератор случайных чисел – numpy.random.PCG64 с фиксированным seed=20250415. Для снижения вычислительной нагрузки при расчёте окрестностей Мура использовались операции с циклическими сдвигами массивов (функции np.roll).

Результаты исследования и их обсуждение

Проведённые численные эксперименты позволяют детально проследить, каким об-

разом пространственная размерность и начальная глобальная плотность активных клеток влияют на эволюцию стохастического клеточного автомата с локализованным источником возбуждения. В данном разделе последовательно рассматриваются: структура начальных конфигураций, временные ряды плотности $\rho(t)$ и энтропии $S(t)$, фазовый портрет в координатах $(S, dS/dt)$ и траектории в плоскости (ρ, S) . Каждый из представленных графиков содержит сопоставление результатов для двумерного и трёхмерного случаев при четырёх значениях $\rho_0^{\text{глоб}} = (0,10; 0,15; 0,20; 0,25)$.

На рисунке 1 приведены примеры стартовых конфигураций для 2D и 3D при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,15$. В левой части показана 2D-решётка с выделенной окружностью радиуса $r = 11$ клеток. В центральной части рисунка представлено сечение трёхмерной решётки плоскостью $z = 15$; радиус сферического очага в этом случае равен $r = 10$ клеткам. Правая панель демонстрирует интегральную проекцию трёхмерного

начального состояния на плоскость XY, где цветом закодирована доля живых клеток вдоль направления Z.

В двумерном случае очаг занимает заметную долю площади решётки (примерно 15% при $r = 11$), и его граница имеет относительно малую протяжённость. В трёхмерной системе при том же значении $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,15$ радиус очага составляет всего 10 клеток, а его объём не превышает 10,0% от общего числа клеток. Таким образом, в 3D начальное возмущение оказывается более компактным в относительных единицах, но при этом каждая клетка на границе сферы взаимодействует с существенно большим числом соседей (до 26 против 8 в 2D).

Ключевой макроскопической характеристикой системы является глобальная плотность активных клеток $\rho(t)$. На рисунке 2 представлены усреднённые по ансамблю временные ряды $\langle \rho(t) \rangle$ для 2D и 3D КА. Для наглядности также показаны коридоры стандартных отклонений, отражающие разброс траекторий внутри ансамбля.

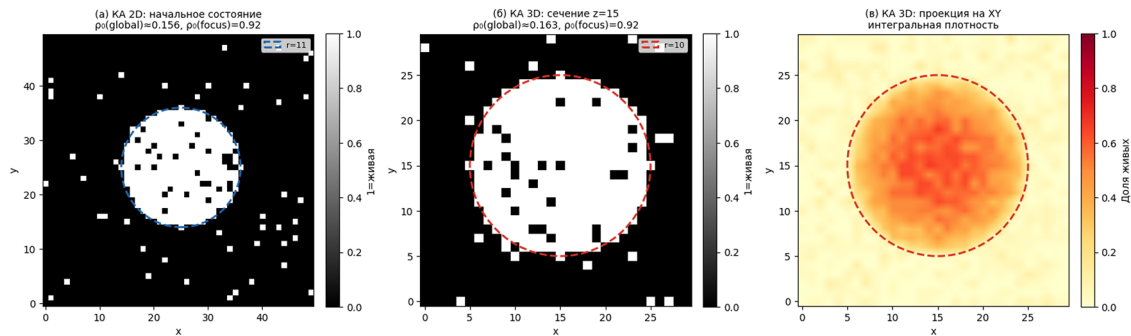


Рис. 1. Начальные конфигурации клеточных автоматов при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,15$: а) 2D-решётка; б) центральное сечение 3D-решётки; в) проекция 3D-распределения на плоскость XY
Источник: составлено авторами

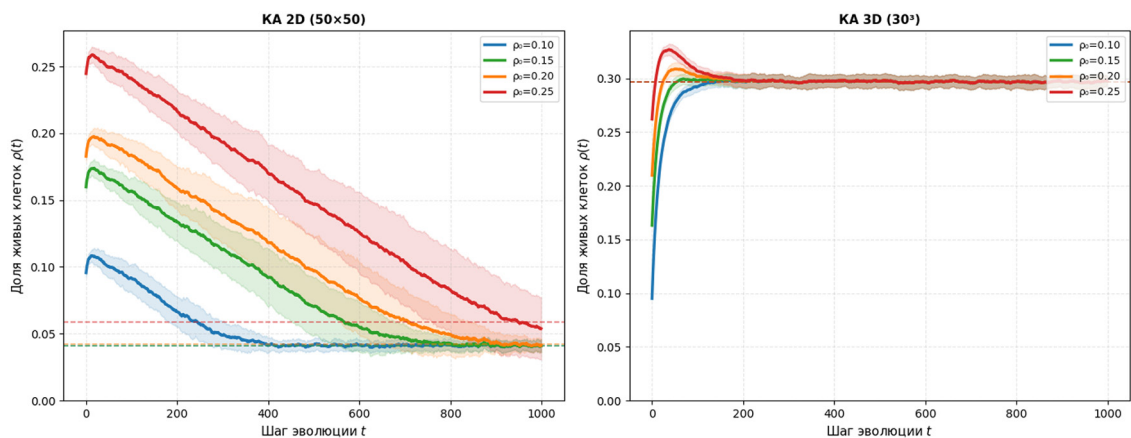


Рис. 2. Динамика доли живых клеток $\rho(t)$ при различных значениях $\rho_0^{\text{глоб}}$: а) 2D-решётка; б) 3D-решётка
Источник: составлено авторами

Анализ кривых выявляет качественное различие в характере эволюции плотности. В двумерном случае для всех $\rho_0^{\text{глоб}}$ наблюдается монотонное убывание $\rho(t)$ на всём протяжении интервала моделирования. Скорость спада существенно зависит от начальной плотности: при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,10$ плотность снижается до стационарного уровня 0,039 за 297 шагов, при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,15$ – до 0,042 за 423 шага, при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,20$ – до 0,045 за 520 шагов, при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,25$ – до 0,061 за 595 шагов (табл. 2). Такое поведение объясняется последовательным «схлопыванием» очага от периферии к центру, причём более крупный очаг требует большего числа итераций для полного угасания.

В трёхмерной системе динамика плотности имеет иной характер. На начальном этапе (первые 50-100 шагов) происходит резкий рост, после чего кривые выходят на квазистационарный уровень и начинают флуктуировать около него. В отличие от 2D, дальнейшего монотонного убывания не наблюдается. Более того, для $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,15$ и выше после 200-го шага заметны небольшие, но устойчивые колебания плотности с амплитудой порядка 0,005, которые не затухают вплоть до конца симуляции. Это указывает на то, что трёхмерная система не приходит к статическому равновесию, а демонстрирует долгоживущие, не затухающие за 1000 шагов колебания плотности и энтропии, что соответствует квазистационарному, а не статическому режиму.

Дополнительную информацию о характере самоорганизации даёт анализ энтропии Шеннона $S(t)$, вычисленной по формуле (3), напомним, что это бинарная энтропия по глобальной плотности (см. раздел 2), по-

этому она отражает лишь степень разупорядоченности средней активности, а не пространственную структуру. На рисунке 3 показаны усреднённые по ансамблю кривые $\langle S(t) \rangle$ для тех же значений $\rho_0^{\text{глоб}}$.

В двумерной системе энтропия монотонно убывает на всём интервале наблюдения. Скорость спада зависит от начальной глобальной плотности: при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,10$ выход на стационар происходит примерно за 300 шагов, при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,25$ этот процесс растягивается до 600 шагов. Конечные значения энтропии для всех $\rho_0^{\text{глоб}}$ лежат в узком диапазоне $S_\infty \approx 0,25-0,32$ бит, что соответствует почти полностью стационарной решётке с редкими вкраплениями активных клеток. Разброс между реализациями относительно невелик, но заметно увеличивается с ростом начальной плотности.

В трёхмерной системе динамика энтропии носит качественно иной характер. После резкого начального роста (первые 50–100 шагов) кривые выходят на промежуточное плато и начинают флуктуировать около него. В отличие от двумерного случая, дальнейшего монотонного снижения не наблюдается. Стационарные значения энтропии S_∞ для 3D заметно выше, чем для 2D, и составляют от 0,83 бит при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,10$ до 0,897 бит при $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,25$ (табл. 2). Кроме того, на кривых после 200-го шага отчетливо видны незатухающие осцилляции с амплитудой порядка 0,02–0,05 бит, что указывает на продолжающуюся перестройку пространственной структуры.

Проведя сравнение результатов по рисункам 2 и 3, можно обобщить, что динамика клеточных автоматов различных размерностей имеет кардинальные различия.

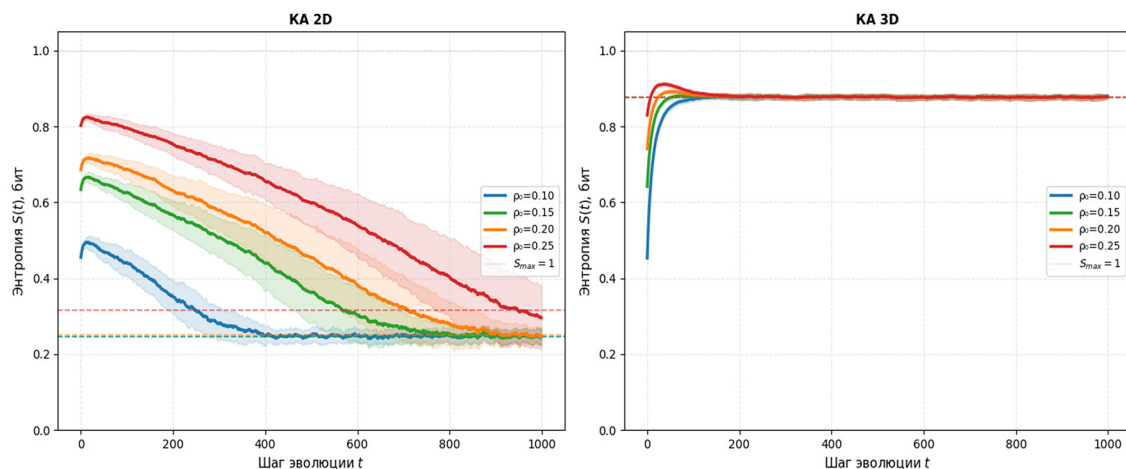


Рис. 3. Динамика энтропии $S(t)$ при различных значениях $\rho_0^{\text{глоб}}$:

а) 2D-решётка; б) 3D-решётка

Источник: составлено авторами

Для 2D КА плотность и энтропия меняются синхронно, величины монотонно убывают и достигают стационарных значений одновременно. Иными словами, диссипация активности здесь напрямую связана с упрощением пространственной структуры – система эволюционирует к статическому равновесию. Совсем иначе дело обстоит в 3D. Плотность $\rho(t)$ перестаёт заметно меняться уже после 150-175 шагов, а энтропия $S(t)$ при этом продолжает колебаться до самого конца расчётов. Получается, что макроскопическая активность быстро закрепляется на некотором квазистационарном уровне, тогда как локальная организация ещё долго перестраивается – кластеры живых клеток обмениваются возбуждением, меняют форму, но всё это почти не сказывается на средней доле активных узлов.

Для проверки того, что периодические границы не искажают динамику в течение 1000 шагов, были проведены контрольные расчёты. В двумерном случае очаг со временем только сжимается, поэтому его граница заведомо не достигает края решётки 50×50 . В трёхмерном случае возможен рост кластеров, поэтому мы повторили серию экспериментов для $\rho_0^{\text{глоб}} = 0,20$ на расширенной решётке $40 \times 40 \times 40$ (объём в 2,37 раза больше исходной). Сравнение усреднённых траекторий $\langle \rho(t) \rangle$ и $\langle S(t) \rangle$ для исходной (30^3) и расширенной (40^3) решёток показало, что различия не превышают 0,005 по плотности и 0,02 бит по энтропии на всём интервале $t = 0 \dots 1000$, что лежит в пределах стандартной ошибки ансамбля. Следовательно, при размере 30^3 влияние периодических границ на наблюдаемые режимы пренебрежимо мало.

Далее рассмотрим фазовую плоскость $dS/dt - S$. Соответствующие портреты для

2D- и 3D-автоматов, построенные по усреднённым траекториям, приведены на рисунке 4. Производную находили численно, сгладив временной ряд скользящим средним.

На плоскости $(S, dS/dt)$ все траектории двумерного автомата, какой бы ни была начальная плотность, скручиваются в спирали и постепенно стягиваются к неподвижным точкам, где $S = S_\infty$, а производная почти нулевая. С ростом $\rho_0^{\text{глоб}}$ начальная энтропия и размах производной на старте увеличиваются, однако качественная картина от этого не меняется – система диссипативно скатывается к статическому равновесию.

Трёхмерный случай выглядит иначе. Ни при одном из рассмотренных значений $\rho_0^{\text{глоб}}$ траектории не сходятся к изолированной точке. Вместо этого они стягиваются к компактным областям возле S_∞ (от 0,83 до 0,90 бит) и там продолжают осциллировать. Даже на больших временах, после 800 шагов, dS/dt регулярно меняет знак, достигая значений порядка $\pm 0,5 \cdot 10^{-2}$ бит/шаг. С увеличением начальной плотности центр такой области смещается вправо, а сама она слегка разрастается. По существу, аттрактор здесь представляет собой не точку, а целое множество в фазовом пространстве – именно это свойство и указывает на квазистационарный характер трёхмерной динамики во всём исследованном диапазоне начальных условий.

Для сопоставления динамики рассмотрим траектории КА в координатах «плотность – энтропия», представленные на рисунке 5. Каждая кривая соответствует одному значению $\rho_0^{\text{глоб}}$ и получена усреднением по ансамблю.

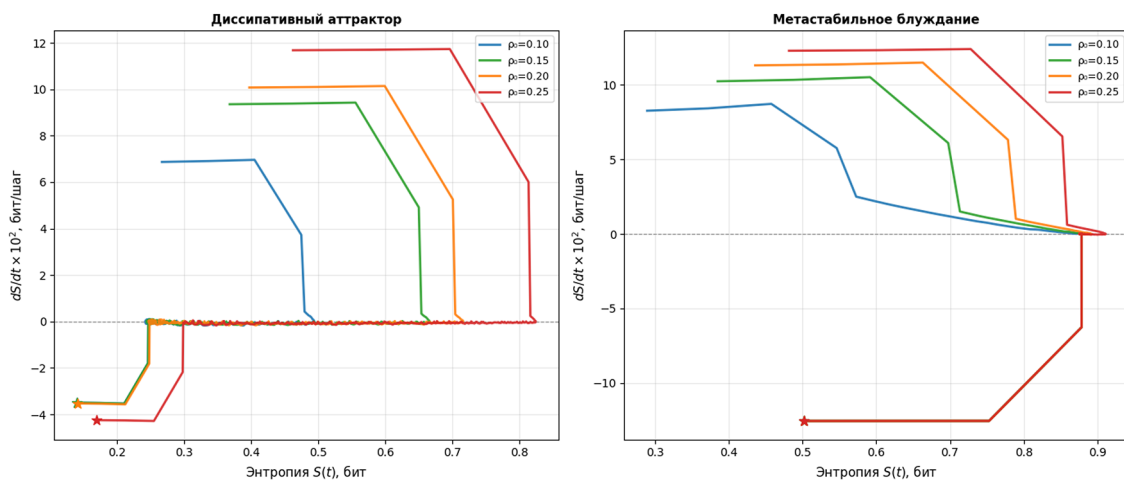


Рис. 4. Фазовый портрет в координатах $(S, dS/dt)$: а) 2D; б) 3D
Источник: составлено авторами

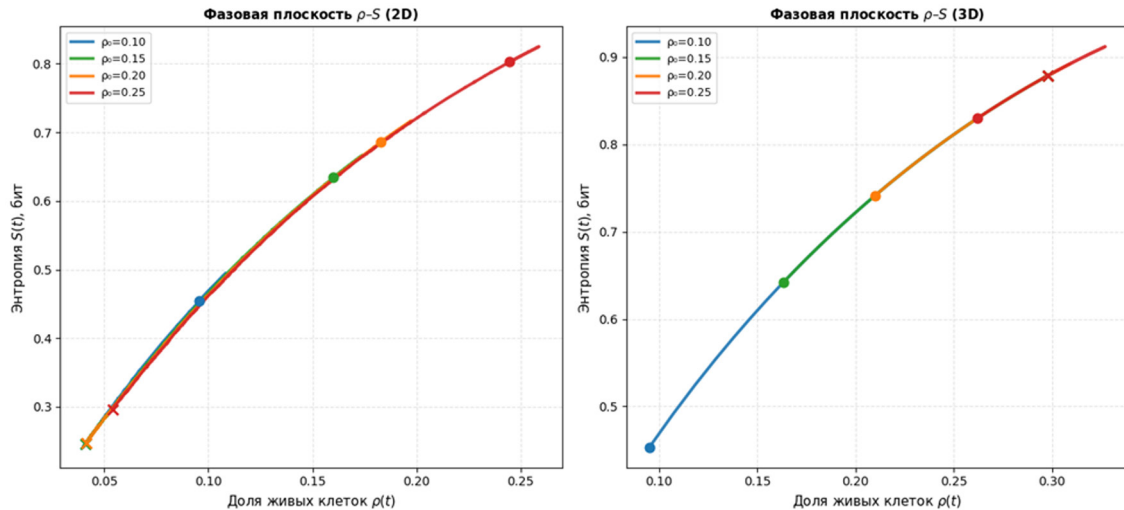


Рис. 5. Фазовые траектории в пространстве (ρ, S) для 2D (слева) и 3D (справа) при различных $\rho_0^{\text{глоб}}$
 Источник: составлено авторами

Трёхмерные фазовые траектории (ρ, S) значительно длиннее двумерных: отношение L_3D/L_2D достигает 2,73 при $\rho_0 = 0,15$ и растёт с начальной плотностью. В 2D все траектории имеют выпуклый профиль и сходятся в узкую область с $S_\infty \approx 0,2-0,335$ бит независимо от ρ_0 , что указывает на быструю потерю структурного разнообразия и диссипативный коллапс. В 3D конечные точки разнесены по оси S : с ростом ρ_0 стационарная энтропия увеличивается от 0,83 до 0,90 бит, траектории демонстрируют изломы и возвратные движения, а энтропия продолжает флуктуировать после стабилизации плотности – это парадоксальное сочетание быстрой релаксации плотности с большой длиной фазового пути. Таким образом, увеличение размерности пространства меняет характер эволюции: от диссипативного коллапса к квазистаци-

онарному блужданию с сохранением внутренней структурной сложности.

Сравнительный анализ динамических режимов двумерного и трёхмерного клеточных автоматов

В таблице 2 представлены основные количественные показатели, характеризующие стационарный режим и переходный процесс для каждого значения глобальной начальной плотности $\rho_0^{\text{глоб}}$. На рисунке 6 приведены автокорреляционные функции, демонстрирующие влияние начальной плотности на время памяти системы.

Для всех величин в таблице 2 стандартная ошибка среднего (SEM) не превышает: для $\rho_\infty - 0,0025$, для $S_\infty - 0,01$ бит, для $\tau - 12$ шагов, для $CV - 1.25\%$, для $L - 0,015$ у. е. (рассчитано по ансамблю из 50 реализаций). Соответственно, 95%-ные доверительные интервалы имеют ширину ± 2 SEM.

Таблица 2

Статистические характеристики эволюции клеточных автоматов 2D и 3D*

$\rho_0^{\text{глоб}}$	Размерность	r (ячеек)	ρ_∞	S_∞ (бит)	τ (шагов)	CV (%)	L (у.е.)
0,10	2D	8	0,039	0,247	297	38,2	0,107
	3D	8	0,31	0,827	112	5,1	0,241
0,15	2D	11	0,042	0,242	423	42,1	0,162
	3D	10	0,297	0,852	126	6,3	0,442
0,20	2D	12	0,045	0,255	520	44,5	0,204
	3D	11	0,297	0,877	137	5,8	0,589
0,25	2D	14	0,061	0,321	595	45,7	0,251
	3D	12	0,297	0,897	176	6,0	0,673

*Источник: составлено авторами.

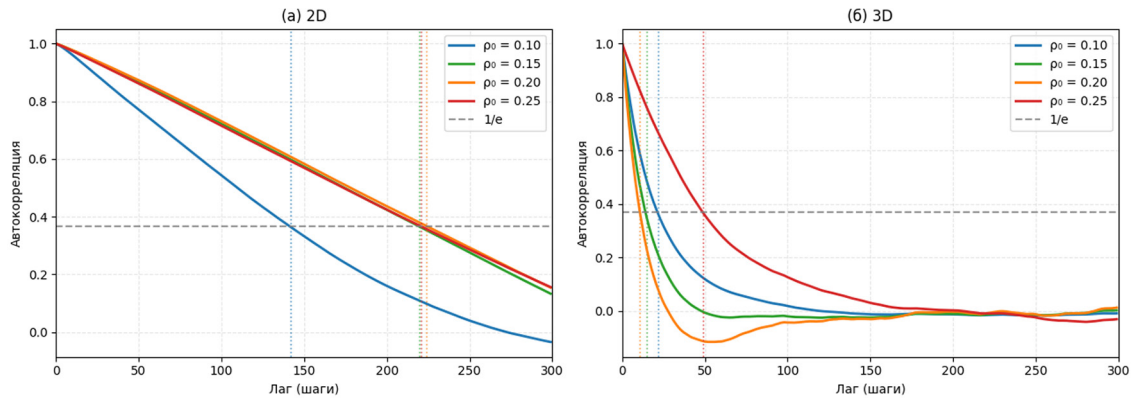


Рис. 6. Влияние начальной глобальной плотности на автокорреляционную функцию
Источник: составлено авторами

Чтобы убедиться, что наблюдаемые различия между 2D и 3D обусловлены именно размерностью, а не разными значениями параметров в таблице 1, были проведены дополнительные серии расчётов. Во-первых, порог активации был отнормирован на число соседей: для 2D $\theta/8 = 0,5$, для 3D $\theta/26 \approx 0,528$. Во-вторых, параметр крутизны β варьировался в пределах 1,5–2,5 (2D) и 0,1–0,2 (3D). В-третьих, вероятность асинхронного обновления α менялась от 0,1 до 0,3 для обеих размерностей. Ни при одной из этих вариаций качественная картина не изменилась: двумерный автомат неизменно демонстрирует монотонную диссипацию и сходимость к точечному аттрактору, тогда как трёхмерный сохраняет незатухающие флуктуации плотности и энтропии. Следовательно, корень различий лежит в топологии решётки и координационном числе, а не в подборе параметров.

Сводные результаты статистики, приведённые в таблице 2, и автокорреляционные функции на рисунке 6 показывают принципиально различную динамику двумерного и трёхмерного клеточных автоматов. В 2D время релаксации τ монотонно растёт с начальной глобальной плотностью от 297 до 595 шагов, а время памяти τ_{mean} – от 150 до 300 шагов. В 3D обе величины значительно меньше ($\tau = 112$ –176 шага, $\tau_{mean} = 20$ –50 шагов) и практически не зависят от ρ_0^{glob} . При этом стационарная плотность ρ_∞ в 2D остаётся низкой (0,039–0,061) и слабо меняется, тогда как в 3D она колеблется с начальной плотностью от 0,29 до 0,31, а энтропия S_∞ – от 0,83 до 0,90 бит, что заметно выше, чем в 2D (0,24–0,3 бит). Коэффициент вариации CV в 2D достигает 38–46%, указывая на высокую чувствительность к случайным флуктуациям, а для 3D он не превышает 5%, свидетельствуя о детерминированной воспроизводимости макросостояния.

Для проверки того, сохраняется ли в 3D более сложная пространственная организация, мы вычислили размер крупнейшего кластера $C_{max}(t)$ и корреляционную длину ξ в стационарном режиме. В 2D уже после 100 шагов C_{max} падает до 1–2 клеток, что соответствует изолированным точкам. В 3D C_{max} после начального роста стабилизируется на уровне 30–50 клеток для $\rho_0 = 0,15$, причём форма кластеров постоянно меняется. Корреляционная длина ξ в 2D не превышает 1,5 шага решётки, в 3D достигает 3–4 шагов. Эти данные подтверждают, что трёхмерная система действительно сохраняет пространственную сложность, а не только флуктуации глобальной плотности.

Различие в динамике 2D- и 3D-автоматов определяется топологией границы очага и координационным числом: в 2D краевые клетки имеют лишь 3–4 активных соседа из 8, что вызывает послойное схлопывание очага и затяжной диссипативный процесс; в 3D каждая граничная клетка взаимодействует с 9–10 соседями из 26, обеспечивая быстрое растекание возбуждения и выход плотности на квазистационарный уровень за значительно более короткое время. При этом ускоренная релаксация плотности в 3D не обедняет внутреннюю динамику – длина фазовой траектории (ρ, S) в 2–3 раза больше, энтропия совершает незатухающие флуктуации, что соответствует IV классу по Вольфраму (квазистационарная самоорганизация), тогда как 2D-автомат ведёт себя как типичная диссипативная система I–II классов, остро реагируя на стохастические возмущения. Таким образом, тип динамики задаётся прежде всего пространственной размерностью, а начальная глобальная плотность (0,10–0,25) лишь модулирует количественные проявления этих закономерностей.

Заключение

Численные расчёты показали глубокие различия между двумерной и трёхмерной динамикой стохастического клеточного автомата при локализованном старте. Время релаксации τ в трёхмерной системе составило 112–176 шагов, в двумерной – 297–595 шагов. Стационарная энтропия в 3D находилась в интервале 0,83–0,90 бит, в 2D – 0,24–0,32 бит, а фазовая траектория в координатах (ρ, S) оказывалась длиннее в 2–3 раза. Коэффициент вариации CV в 2D достигал 38–46%, в 3D не превышал 6,3% (составлял 5–6%). Фазовые портреты укрепили эту картину: в 2D траектории стягиваются к точечному аттрактору, в 3D траектории не сходятся к неподвижной точке, а остаются в ограниченной области фазового пространства, совершая незатухающие колебания на всём интервале наблюдения (1000 шагов).

Корень этих различий – в топологии границы начального очага. На плоской решётке краевые клетки окружены всего 3–4 активными соседями из 8, чего недостаточно для самоподдержания, и очаг послойно гаснет от периферии к центру, теряя структурную сложность. В трёхмерном объёме на границе у каждой клетки набирается в среднем 9–10 живых соседей из 26 – возбуждение получает шанс сохраниться и быстро растекается по решётке, формируя устойчивый квазистационарный режим. По классификации Вольфрама, двумерный автомат демонстрирует черты I–II классов (откат к простому аттрактору, высокая чувствительность к шуму), а трёхмерный – IV класс (квазистационарная самоорганизация с долгоживущими перестройками и стабильно высокой энтропией). Изменение начальной глобальной плотности от 0,10 до 0,25 не ломает эту качественную картину, а лишь усиливает количественные проявления.

Список литературы

1. Wolfram S. A New Kind of Science. Champaign, IL: Wolfram Media, 2002. 1197 p. URL: <https://horizons-2000.org/92.%20Misc%20Files/Reading/Wolfram%20-%20A%20New%20Kind%20of%20Science.pdf> (дата обращения: 12.03.2026). ISBN: 978-1-57955-008-0.
2. Ilachinski A. Cellular automata: a discrete universe. World Scientific Publishing Company, 2001. 808 p. URL: http://lib.ysu.am/disciplines_bk/10601885498bd77aa5069c30185beabd.pdf (дата обращения: 12.05.2026). ISBN: 981-02-4623-4.
3. Rendell P. Turing Machine Universality of the Game of Life. Cham: Springer International Publishing, 2016. 182 p. DOI: 10.1007/978-3-319-19842-2. ISBN: 978-3-319-19841-5.
4. Lei Q., Lee J., Huang X., Kawasaki S. Entropy-Based Classification of Elementary Cellular Automata under

Asynchronous Updating: An Experimental Study // Entropy. 2021. Vol. 23. № 2. P. 209. DOI: 10.3390/e23020209.

5. Alfaro G., Sanjuán M. A. F. Classification of cellular automata based on the Hamming distance // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2024. Т. 34. № 8. DOI: 10.1063/5.0227349.

6. Лобанов А. И. Модели клеточных автоматов // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. № 3. С. 273–293. DOI: 10.20537/2076-7633-2010-2-3-273-293. URL: <https://crm.ics.org.ru/journal/article/1726> (дата обращения: 21.05.2026).

7. Матюшкин И. В. Клеточно-автоматные методы решения классических задач математической физики на гексагональной сетке. Ч. 1 // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9. № 2. С. 167–186. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2554/> (дата обращения: 20.05.2026). DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-2-167-186.

8. Матюшкин И. В. Клеточно-автоматные методы решения классических задач математической физики на гексагональной сетке. Ч. 2 // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9. № 4. С. 547–566. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2592/> (дата обращения: 20.05.2026). DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-4-547-566.

9. Матюшкин И. В., Заплетина М. А. Обзор по тематике клеточных автоматов на базе современных отечественных публикаций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 1. С. 9–57. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2764/> (дата обращения: 20.05.2026). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-9-57.

10. Pomorski K., Kotula D. Thermodynamics in Stochastic Conway's Game of Life // Condens. Matter 2023. Vol. 8. № 2. P. 47. DOI: 10.3390/condmat8020047.

11. Алешкин А. С., Обухова А. Г., Жуков Д. О. Математическое и программное обеспечение стохастических клеточных автоматов с памятью // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13. № 2. С. 25–39. DOI: 10.25559/SITITO.2017.2.220.

12. Бандман О. Л. Режимы функционирования асинхронных клеточных автоматов, моделирующих нелинейную пространственную динамику // Прикладная дискретная математика. 2015. № 1 (27). С. 105–119. EDN: TOFAUV.

13. Клеммер П. С., Рави Кумар, Шебанов В. В. Исследование поведения стохастической энтропии в системе клеточного автомата 2d и 3d размерности // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2026. № 2. С. 40–50. URL: <https://applied-research.ru/ru/article/view?id=13789> (дата обращения: 21.05.2026). DOI: 10.17513/mjpf.13789.

14. Саруханян С. К. Подход к численной оценке адекватности трехмерной клеточно-автоматной модели процесса диффузии вещества // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2025. Т. 50. № 1. С. 111–133. DOI: 10.26117/2079-6641-2025-50-1-111-133. EDN: BHWDOA.

15. Ершов Н. М., Попов А. М. Моделирование химических и биологических систем с помощью стохастических блочных клеточных автоматов с окрестностью Маркова // Computational nanotechnology. 2025. Т. 12. № 3. С. 31–40. DOI: 10.33693/2313-223X-2025-12-3-31-40.

16. Шебанов В. В. Исследование поведения стохастической энтропии системы клеточного автомата от исходной конфигурации распределения живых клеток // Исследования молодых ученых : материалы XCIV Междуна. науч. конф. (г. Казань, январь 2025 г.). Казань: Молодой ученый, 2025. С. 1–12. URL: <https://moluch.ru/conf/stud/archive/528/18816>. (дата обращения: 21.05.2026).

17. Шибков А. А., Кочегаров С. С., Компьютерное и физико-химическое моделирование эволюции фрактального коррозионного фронта, Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13. № 1. С. 105–124. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-105-124. URL: <https://crm.ics.org.ru/journal/article/3031> (дата обращения: 21.05.2026).

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: The authors declare that there is no conflict of interest.

Финансирование: Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования.

Financing: The research was performed without external funding.